CONCURSUL
"MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC"
ETAPA MUNICIPALĂ – 17 MAI 2014

Subiecte
-clasa a XI-a-

(10p) **1.** Arătaţi că există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + I_n = 0_n$ dacă şi numai dacă n este par.

(10p) **2.** Determinaţi rangul matricei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 10}$, unde $a_{ij} = \cos(10i + j - 10)$.

(10p) **3.** Aflaţi valoarea maximă posibilă a unui determinant de ordin 3, având elementele numere reale de modul cel mult 1.

(10p) **4.** Arătaţi că şirul $(\sin 3n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită.

(10p) **5.** Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos\frac{x^2-1}{x^2+1} + \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$
a) Determinaţi mulţimea punctelor în care funcţia este derivabilă.
b) Calculaţi $f(-\pi) + f(\{\pi\})$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracţionară.

(10p) **6.** Arătaţi că, dacă a, b sunt numere reale şi $b > 0$, atunci funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \dfrac{x+a}{x^2+b}$ are trei puncte de inflexiune.

(10p) **7.** Arătaţi că, pentru orice $x \in \mathbb{R},\ x \ge 2$, avem $(x+1)\cos\dfrac{\pi}{x+1} - x\cos\dfrac{\pi}{x} > 1$.

(10p) **8.** Fie $a < b$ numere reale şi $f: [a,b] \to \mathbb{R},\ g: [a,b] \to \mathbb{R},\ h: [a,b] \to \mathbb{R}$ trei funcţii derivabile pe $[a,b]$. Demonstraţi că există un număr real c astfel încât

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Rezolvările celor 8 probleme propuse se vor redacta pe foi distincte din mapa de concurs. Foaia secretizată va fi utilizată ca ciornă şi nu va fi luată în considerare la evaluarea lucrărilor.
Timp de lucru: 2 ore.
Nu se admit contestaţii.
Rezultatele se vor anunţa în cadrul festivităţii de premiere care va avea loc astăzi, 17.05.2014, în Sala de festivităţi a C.N. "Gh. Şincai", începând cu ora 18:00.

SUCCES!