

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”

EDIȚIA A 15-A

ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



Clasa a X-a

- 1.** Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere reale pozitive, atunci

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^n.$$

Soluție. Desfăcând parantezele, este suficient să arătăm că $\sum a_1 a_2 \dots a_k \geq C_n^k (\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^k$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$. Deoarece suma din membrul stâng are C_n^k termeni și fiecare a_i apare de C_{n-1}^{k-1} ori, inegalitatea mediilor aplicată pentru suma din membrul stâng ne spune că ea este cel puțin $C_n^k (a_1 \dots a_n)^p$, unde $p = \frac{1}{C_n^k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{k}{n}$, adică exact membrul drept.

- 2.** Arătați că, dacă n este un număr natural, atunci numărul $N = 5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$ nu este prim.
Soluție. Dacă notăm $5^n = a \geq 5$, atunci $N = a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)$ iar cei doi factori sunt mai mari ca 1.

3. Determinați minimul expresiei $\log_{x_1}(x_2 - \frac{1}{4}) + \log_{x_2}(x_3 - \frac{1}{4}) + \dots + \log_{x_{n-1}}(x_n - \frac{1}{4}) + \log_{x_n}(x_1 - \frac{1}{4})$ când $x_1, x_2, \dots, x_n \in (\frac{1}{4}, 1)$.

Soluție. Deoarece $x - \frac{1}{4} \leq x^2$ și logaritmii au bază subunitară, suma este cel puțin $2 \sum_{k=1}^n \log_{x_k} x_{k+1} \geq 2n$ (folosind și inegalitatea mediilor). Egalitatea cu $2n$ se obține pentru $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{2}$, deci minimul este $2n$.

- 4.** Fie $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = \max\{|z+1|, |z^2+1|\}$. Determinați minimul funcției f .

Soluție. Avem $|z+1|^2 + |z^2+1|^2 \geq |(z+1)^2 - (z^2+1)| = 2|z| = 2$, deci $|z+1| \geq 1$ sau $|z^2+1| \geq 1$. Deducem $f(z) \geq 1$, $\forall z \in D$. Se verifică imediat că, dacă $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, atunci $|\varepsilon| = 1$ și $f(\varepsilon) = 1$, deci $\min f = 1$.

- 5.** Determinați funcțiile injective $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care au proprietatea $2f(f(n)) \leq n + f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Evident funcția identică verifică; arătăm că este singura. În caz contrar, dacă luăm cel mai mic n pentru care $f(n) \neq n$, atunci din $f(n) \neq f(k) = k$ pentru $k = 0, 1, \dots, n-1$ rezultă $f(n) > n$. Deducem $2f(f(n)) \leq n + f(n) < 2f(n)$, deci $f(m_1) < m_1$, unde $m_1 = f(n)$. Reiese inducțiv că $f(f(m_1)) < f(m_1) = m_2, \dots, f(m_k) < m_k$, unde $f(m_k) = m_{k+1}$ pentru $k = 1, 2, \dots$. Obținem astfel un sir strict descrescător de numere naturale – imposibil.

- 6.** Determinați numerele întregi m pentru care numărul $a = \sqrt[3]{m^2 - 35} + \sqrt[3]{m^3 - 1}$ este rațional.

Soluție. Fie $b = \sqrt[3]{m^2 - 35} \sqrt[3]{m^3 - 1}$; avem $a^3 = m^3 + m^2 - 36 + 3ab$, deci $ab \in \mathbb{Q}$. Dacă $a = 0$, atunci $0 = m^3 + m^2 - 36 = (m-3)(m^2 + 4m + 12)$, iar $m \in \mathbb{Z}$ implică $m = 3$. Dacă $a \neq 0$, atunci $b \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt[3]{m^2 - 35}, \sqrt[3]{m^3 - 1}$ sunt rădăcinile ecuației $t^2 - at + b = 0$. Deducem $m^3 - 1 = t_1^3 = at_1^2 - bt_1 = (a^2 - b)t_1 - ab$, deci $t_1 \in \mathbb{Q}$ sau $a^2 = b$; în ambele cazuri rezultă că $\sqrt[3]{m^3 - 1} \in \mathbb{Q}$, deci $m^3 - 1 = n^3$, $n \in \mathbb{Z}$. De aici reiese $m - n = m^2 + mn + n^2 = \pm 1$, de unde $m = 0$ sau $m = 1$. Niciuna dintre aceste valori nu convine, deci rămâne doar $m = 3$.

- 7.** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2^x + 2^y = 8 \\ (\log_2 x)(\log_2 y) = 1 \end{cases}$.

Soluție. Observăm că $\log_2 x \geq 0$ și $\log_2 y \geq 0$ – în caz contrar ar ieși $2^x + 2^y \leq 4$. Din inegalitatea mediilor rezultă $\log_2 x + \log_2 y \geq 2$, deci $xy \geq 4$, apoi $x + y \geq 4$, de unde $2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} \geq 2\sqrt{2^4} = 8$. Pentru a obține egalitate este necesar ca $x = y = 2$, caz care convine.

- 8.** Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$.

Soluție. Observăm că, dacă $x > 2$, atunci $x^3 - 3x > 4x - 3x = x > \sqrt{x+2}$, deci soluțiile ecuației verifică $x \in [-2, 2]$. Substituind $x = 2 \cos t$, $t \in [0, \pi]$, ecuația devine $2 \cos 3t = 2 \cos \frac{t}{2}$, de unde $3t = \pm \frac{t}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă soluțiile $t = \frac{4k\pi}{5}$, $k = 0, 1$ sau $t = \frac{4k\pi}{7}$, $k = 0, 1$, deci avem trei soluții reale: $2, 2 \cos \frac{4\pi}{5}, 2 \cos \frac{4\pi}{7}$.