

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA A 15-A  
ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



## Clasa a X-a

1. Arătați că, dacă  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  și  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt numere reale pozitive, atunci

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^n.$$

2. Arătați că, dacă  $n$  este un număr natural, atunci numărul

$$N = 5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$

nu este prim.

3. Determinați minimul expresiei

$$\log_{x_1} \left( x_2 - \frac{1}{4} \right) + \log_{x_2} \left( x_3 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log_{x_{n-1}} \left( x_n - \frac{1}{4} \right) + \log_{x_n} \left( x_1 - \frac{1}{4} \right)$$

când  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (\frac{1}{4}, 1)$ .

4. Fie  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(z) = \max\{|z+1|, |z^2+1|\}$ . Determinați minimul funcției  $f$ .

5. Determinați funcțiile injective  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  care au proprietatea

$$2f(f(n)) \leq n + f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

6. Determinați numerele întregi  $m$  pentru care numărul  $a = \sqrt[3]{m^2 - 35} + \sqrt[3]{m^3 - 1}$  este rațional.

7. Rezolvați sistemul de ecuații  $\begin{cases} 2^x + 2^y = 8 \\ (\log_2 x)(\log_2 y) = 1 \end{cases}$ .

8. Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației  $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$ .