

**CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”**

EDIȚIA A 15-A

ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



**Clasa a XI-a**

**1.** Arătați că există o funcție unică  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $(f(x))^5 + x^6 f(x) - x^5 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  și această funcție este continuă pe  $\mathbb{R}$ . Este funcția derivabilă în 0?

*Soluție.* Avem  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . De asemenea,  $f(-x) = -f(x)$ , aşa că studiem doar cazul  $x > 0$ . Observăm că, în acest caz,  $0 < f(x) < x$ . Luăm  $g(x) = \frac{f(x)}{x} \in (0, 1)$  și avem  $g^5(x) + x^2 g(x) = 1$ , sau  $(1 - g^5(x)) / g(x) = x^2$ . Ecuația  $h(g(x)) = x^2, x \neq 0$  are soluția unică  $g(x) = h^{-1}(x^2)$ , unde  $h : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $h(t) = (1 - t^5)/t$ . Cum  $h$  este continuă, rezultă că  $g$  este continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Deoarece  $h^{-1}$  este mărginită,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x h^{-1}(x^2) = 0 = f(0)$ , deci  $f$  este continuă și în 0. Apoi  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} h^{-1}(x^2) = 1$ .

**2.** Arătați că dacă o funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă și are derivata strict crescătoare, atunci  $f$  este nemărginită.

*Soluție.* Dacă există  $x_0$  astfel încât  $f'(x_0) > 0$ , atunci  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c_x) > (x - x_0)f'(x_0)$  pentru  $x > x_0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . În caz contrar există  $x_0$  astfel încât  $f'(x_0) < 0$  și, rationând ca mai sus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**3.** Funcția  $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  este de două ori derivabilă și îndeplinește condițiile  $f(0) = 2, f'(0) = -2, f(1) = 1$ . Demonstrați că există  $a \in (0, 1)$  astfel încât  $f(a)f'(a) + f''(a) = 0$ .

*Soluție.* Considerăm  $g(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + f'(x)$ ; avem  $g(0) = 0$ . Teorema lui Lagrange aplicată funcției  $1/f$  ne dă un punct  $c \in (0, 1)$  astfel încât  $-\frac{f'(c)}{f^2(c)} = \frac{1}{2}$ , deci  $g(c) = 0$ . Concluzia rezultă acum din teorema lui Rolle aplicată lui  $g$ .

**4.** Rezolvați ecuația  $2^x + 3^x + 6^x = 3x^2 + 5x + 3$ .

*Soluție.* Observăm soluțiile  $-1, 0, 1$ . Dacă ar mai exista încă una, derivata a treia a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - 3x^2 - 5x - 3$  ar avea cel puțin o rădăcină (Rolle aplicat pentru  $f$ , apoi  $f'$ , apoi  $f''$ ), contradicție cu  $f'''(x) = 2^x \ln^3 2 + 3^x \ln^3 3 + 6^x \ln^3 6 > 0$  pentru orice  $x$ .

**5.** Arătați că ecuația  $x - \operatorname{arctg} x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ , are o unică soluție reală  $x_n$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sqrt[3]{n}$ .

*Soluție.* Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$  este strict crescătoare și surjectivă, deci inversabilă. Astfel,  $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ . În plus,  $f^{-1}$  este continuă și  $f^{-1}(0) = 0$ , deci  $x_n \rightarrow 0$ . Deoarece  $n = \frac{1}{x_n - \operatorname{arctg} x_n}$ , limita cerută este  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x_n^3}{x_n - \operatorname{arctg} x_n}} = \sqrt[3]{3}$ , folosind l'Hospital.

**6.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Determinați  $x \in \mathbb{C}$  pentru care matricea  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ , unde  $a_{ij} = \begin{cases} 1+x, & \text{dacă } j = i \\ 1, & \text{dacă } j \neq i \end{cases}$ , este inversabilă și calculați-i inversa în acest caz.

*Soluție.* Avem  $A = xI_n + B$ , unde  $B$  este matricea cu toate elementele egale cu 1. Rezultă  $(A - xI_n)^2 = B^2 = nB = n(A - xI_n)$ , de unde  $(x^2 + nx)I_n = A((n+2x)I_n - A)$ . Dacă  $x \neq 0$  și  $x \neq -n$ , relația precedentă arată că  $A^{-1} = \frac{1}{x^2 + nx} ((n+2)xI_n - A)$ . Dacă  $x = 0$  sau  $x = -n$ , arătăm imediat că  $\det A = 0$ .

**7.** Există 9 numere prime pozitive distințe  $p_1, p_2, \dots, p_9$  astfel încât  $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{vmatrix} = 0$ ?

*Soluție.* Da; le luăm în progresie aritmetică cu rația 6. Un exemplu: 7, 13, 19, 17, 23, 29, 31, 37, 43.

**8.** Fie  $P$  un punct cu abscisă nenulă pe graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Tangenta în  $P$  la graficul funcției intersechetează din nou graficul funcției într-un punct  $Q$ . Arătați că panta tangentei în  $Q$  la graficul funcției este de patru ori mai mare decât panta tangentei în  $P$ .

*Soluție.* Dacă  $P(a, a^3)$ , tangenta în  $P$  este  $y - a^3 = 3a^2(x - a)$ , are panta  $3a^2$  și taie din nou graficul în punctul  $Q$  de abscisă  $-2a$ . Panta tangentei în  $Q$  este  $3(-2a)^2 = 12a^2 = 4 \cdot 3a^2$ .