

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA A 15-A
ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



Clasa a XI-a

1. Arătați că există o funcție unică $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$(f(x))^5 + x^6 f(x) - x^5 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

și această funcție este continuă pe \mathbb{R} . Este funcția derivabilă în 0 ?

2. Arătați că dacă o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și are derivata strict crescătoare, atunci f este nemărginită.

3. Funcția $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ este de două ori derivabilă și îndeplinește condițiile $f(0) = 2, f'(0) = -2, f(1) = 1$. Demonstrați că există $a \in (0, 1)$ astfel încât $f(a)f'(a) + f''(a) = 0$.

4. Rezolvați ecuația $2^x + 3^x + 6^x = 3x^2 + 5x + 3$.

5. Arătați că ecuația $x - \arctg x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, are o unică soluție reală x_n . Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sqrt[3]{n}$.

6. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați $x \in \mathbb{C}$ pentru care matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, unde $a_{ij} = \begin{cases} 1+x, & \text{dacă } j = i \\ 1, & \text{dacă } j \neq i \end{cases}$, este inversabilă și calculați-i inversa în acest caz.

7. Există 9 numere prime pozitive distințe p_1, p_2, \dots, p_9 astfel încât

$$\left| \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{array} \right| = 0?$$

8. Fie P un punct cu abscisă nenulă pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Tangenta în P la graficul funcției intersecrează din nou graficul funcției într-un punct Q . Arătați că panta tangentei în Q la graficul funcției este de patru ori mai mare decât panta tangentei în P .