

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”

EDIȚIA A 15-A

ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



Clasa a XII-a

1. Arătați că dacă a și b sunt două rădăcini distințe ale polinomului $f = X^4 + X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$, atunci ab este rădăcină a polinomului $X^6 + X^4 + X^3 - X^2 - 1$.

Soluție. Dacă a, b, c, d sunt rădăcinile lui f , atunci ab, ac, ad, bc, bd, cd sunt rădăcinile lui

$$g = (X - ab)(X - cd)(X - ac)(X - bd)(X - ad)(X - bc) = (X^2 - mX - 1)(X^2 - nX - 1)(X^2 - pX - 1),$$

unde $m = ab + cd$, $n = ac + bd$, $p = ad + bc$. Obținem

$$g = (X^2 - 1)^3 - X(X^2 - 1)^2(m + n + p) + X^2(X^2 - 1)(mn + mp + np) - mnpX^3$$

și $m+n+p = 0$, $mn+mp+np = (a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)-4abcd = 4$, $mnp = abcd\Sigma a^2 + \Sigma a^2 b^2 c^2 = -1$, deoarece $\Sigma a^2 = 1$ și $\Sigma a^2 b^2 c^2 = a^2 b^2 c^2 d^2 \Sigma \frac{1}{a^2} = 0$, pentru că $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ sunt rădăcinile lui $h = X^4 - X - 1$.

2. Fie (a_n) un sir de numere pozitive cu limita 0. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n} + a_n)$.

Soluție. Dacă x_n este sirul cerut, atunci $x_n \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n}) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$.

Apoi, dacă $a_n < a$ pentru $n \geq n_0$, atunci $x_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n} + a) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+a+x)dx = J$, unde $J = (2+a)\ln(2+a) - (1+a)\ln(1+a) - 1 \xrightarrow[a \rightarrow 0]{} 2\ln 2 - 1$. Astfel, limita cerută este $2\ln 2 - 1$.

3. Fie f, g funcții reale continue astfel încât $\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 g^2(x)dx = 1$. Arătați că există $a \in [0, 1]$ astfel încât $f(a) + g(a) \leq 2$.

Soluție. Avem $(f+g)^2 \leq 2f^2 + 2g^2$, deci $\int_0^1 (f(x) + g(x))^2 dx \leq 4$. Dacă presupunem $f(x) + g(x) > 2$ pentru orice $x \in [0, 1]$, apare o contradicție.

4. Calculați $I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x} dx$.

Soluție. Luăm și integrala $J = \int_0^\pi \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} dx$. Avem $I + J = \pi$ și $J - I = \ln(e^x + \cos x + \sin x)|_0^\pi$, de unde $I = \frac{1}{2}(\pi + \ln 2 - \ln(e^\pi - 1))$.

5. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx$.

Soluție. Dacă $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx$, atunci $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ și $I_n \geq I_{n+1}$, de unde $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$. Limita cerută este $1/2$.

6. Arătați că dacă un grup G are un număr finit de subgrupuri, atunci el este finit.

Soluție. Fiecare element are ordin finit (în caz contrar, dacă x are ordin infinit atunci $\langle x \rangle$ are o infinitate de subgrupuri: cele de forma $\langle x^n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$). Dacă grupul ar fi infinit, atunci am putea alege $x_n \in G$, $n = 1, 2, 3, \dots$ astfel încât $x_{n+1} \notin \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \dots \cup \langle x_n \rangle$ și am obține subgrupurile distincte $\langle x_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Fie $f_1 = X^2 - 2 \in \mathbb{R}[X]$ și $f_{n+1}(X) = f_1(f_n(X))$ pentru $n = 1, 2, 3, \dots$. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, toate rădăcinile polinomului f_n sunt reale.

Soluție. Căutăm rădăcini de forma $2\cos t$. Avem inductiv $f_n(2\cos t) = 2\cos 2^n t$, iar $\cos 2^n t = 0$ are soluțiile $t_k = \frac{\pi}{2^{n+1}} + k\frac{\pi}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Avem $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{2^n-1} < \pi$, deci f_n are cel puțin 2^n rădăcini distincte, de forma $2\cos t_k$. Cum f_n are gradul 2^n , rezultă concluzia cerută.

8. Fie $L = \{f \in \mathbb{Z}_2[X] \mid \text{grad } f \leq 2\}$. Definim pe L legea de compozitie „ \circ ” prin: $f \circ g = \text{restul împărțirii polinomului } fg \text{ la polinomul } X^3 + X + \hat{1}$. Demonstrați că $(L, +, \circ)$ este corp.

Soluție. Se verifică în mod banal că $(L, +, \circ)$ este inel cu 8 elemente. Pentru a dovedi că este corp, este suficient să arătăm că nu există divizori ai lui zero. Într-adevăr, dacă $f \circ g = \hat{0}$, atunci fg este divizibil cu $X^3 + X + \hat{1}$. Cum $X^3 + X + \hat{1}$ este ireductibil peste \mathbb{Z}_2 , reiese că f sau g este divizibil cu $X^3 + X + \hat{1}$, deci $f = \hat{0}$ sau $g = \hat{0}$.