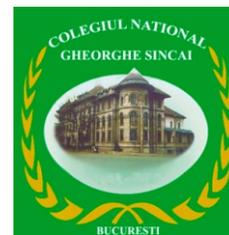


CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA A 15-A
ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



Clasa a XII-a

1. Arătați că dacă a și b sunt două rădăcini distincte ale polinomului $f = X^4 + X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$, atunci ab este rădăcină a polinomului $X^6 + X^4 + X^3 - X^2 - 1$.

2. Fie (a_n) un șir de numere pozitive cu limita 0. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} + a_n \right).$$

3. Fie f, g funcții reale continue astfel încât $\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 g^2(x) dx = 1$. Arătați că există $a \in [0, 1]$ astfel încât $f(a) + g(a) \leq 2$.

4. Calculați $I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x} dx$.

5. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^n dx$.

6. Arătați că dacă un grup G are un număr finit de subgrupuri, atunci el este finit.

7. Fie $f_1 = X^2 - 2 \in \mathbb{R}[X]$ și $f_{n+1}(X) = f_1(f_n(X))$ pentru $n = 1, 2, 3, \dots$. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, toate rădăcinile polinomului f_n sunt reale.

8. Fie $L = \{f \in \mathbb{Z}_2[X] \mid \operatorname{grad} f \leq 2\}$. Definim pe L legea de compoziție „ \circ ” prin:

$$f \circ g = \text{restul împărțirii polinomului } fg \text{ la polinomul } X^3 + X + \hat{1}.$$

Demonstrați că $(L, +, \circ)$ este corp.