

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”

EDIȚIA A 15-A

ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



Clasa a IX-a

1. Fie A o mulțime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ și S o mulțime de submulțimi a lui A cu proprietățile:

- orice două mulțimi din S au cel puțin un element comun;
- dacă o submulțime M a lui A are cel puțin un element comun cu orice mulțime din S , atunci M face parte din S .

Arătați că S are 2^{n-1} elemente.

Soluție. Submulțimile lui A se pot împărți în 2^{n-1} perechi de mulțimi complementare. Dacă S are mai mult de 2^{n-1} elemente, atunci există o astfel de pereche în S , deci intersecția lor este vidă. Dacă S are mai puțin de 2^{n-1} elemente, atunci există o astfel de pereche X, Y cu $X \notin S, Y \notin S$. A doua proprietate arată că există $T, U \in S$ astfel încât $T \cap X = \emptyset$ și $U \cap Y = \emptyset$, deci $T \subset Y, U \subset X$, de unde $T \cap U = \emptyset$ - fals.

2. Demonstrați că, oricum am elimina un pătrat 1×1 de pe o tablă de șah de dimensiuni $2^n \times 2^n$ (unde $n \in \mathbb{N}^*$), pătratele rămase pot fi acoperite complet cu $\frac{4^{n-1}-1}{3}$ piese de forma alăturată (o piesă este alcătuită din trei pătrate 1×1).



Soluție. Raționăm prin inducție. Pentru $n = 1$ este evident. Presupunem că afirmația este adeverată pentru n și considerăm cazul $n+1$. Împărțim tabla în 4 sferturi $2^n \times 2^n$. Conform ipotezei de inducție, sfertul care conține pătratul eliminat poate fi acoperit cu $(4^n - 1)/3$ piese. Eliminăm din celelalte trei sferturi colțul „de lângă centrul tablei”, acoperim pătratele rămase în aceste sferturi cu câte $(4^n - 1)/3$ piese, iar cele trei colțuri eliminate le acoperim cu o piesă.

3. Arătați că există numere întregi $m, n, p > 2^{670}$ astfel încât $mnp = 2^{2016} - 1$.

Soluție. Dacă notăm $2^{336} = a$, atunci $2^{2016} - 1 = a^6 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$ și $a^2 - 1 > 2^{670}$, $a^2 - a > 2^{670}$.

4. Fie A' , B' , C' picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B respectiv C ale triunghiului ABC . Arătați că, dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, atunci triunghiul este echilateral.

Soluție. Avem $\overrightarrow{AA'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CC'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Condiția din ipoteză revine la $\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{a+c} - 1\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, de unde $b^2 = ac$ și $c^2 = ab$, ceea ce duce la $a = b = c$.

5. Determinați cel mai mare și cel mai mic element al mulțimii $A = \{n + [\frac{2016}{n}] \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2016\}$.

Soluție. Din $x_n = n + [\frac{2016}{n}] > n + \frac{2016}{n} - 1 > 2\sqrt{2016} - 1 > 88$ reiese că elementele mulțimii sunt cel puțin 89. Pentru $n = 45$ obținem $x_n = 89$, deci $\min A = 89$. Apoi, $n + [\frac{2016}{n}] \leq n + \frac{2016}{n} \leq 2017$ (ultima inegalitate fiind justificată de faptul că este echivalentă cu $(n-1)(n-2016) \leq 0$ și pentru $n = 1$ obținem $x_n = 2017$, deci $\max A = 2017$).

6. Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$.

Soluție. $\cos(\cos x) - \sin(\sin x) = \sin(\pi/2 - \cos x) - \sin(\sin x) = 2 \sin \frac{\pi - 2(\sin x + \cos x)}{4} \cos \frac{\pi - 2(\cos x - \sin x)}{4}$. Din $(\cos x \pm \sin x)^2 = 1 \pm \sin 2x \leq 2$ rezultă $2|\cos x \pm \sin x| \leq 2\sqrt{2} < \pi$, deci argumentele sinusului și cosinusului sunt în primul cadran, de unde concluzia.

7. Considerăm ecuația $2x^2 - 2mx + m^2 - 10m + 45 = 0$, unde necunoscuta este x și m este un parametru real. Arătați că dacă ecuația are rădăcini reale x_1, x_2 , atunci:

a) x_1 și x_2 se află în intervalul $[5 - \sqrt{5}, 5 + \sqrt{5}]$;

b) $\frac{x_1}{x_2} \in [\frac{1}{2}, 2]$.

Soluție. a) Avem $x_1 + x_2 = m$ și $2x_1x_2 = m^2 - 10m + 45 = (x_1 + x_2)^2 - 10(x_1 + x_2) + 45$, de unde $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 5$. Astfel, $|x_i - 5| \leq \sqrt{5}$, $i = 1, 2$, de unde concluzia.

b) Fie $t = \frac{x_1}{x_2}$; din $2x_1x_2 = (m-5)^2 + 20$ reiese $t > 0$. Avem $t + \frac{1}{t} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{20m-90}{m^2-10m+45} = f(m)$ și se verifică imediat că $f(m) \leq \frac{5}{2}$. De aici, ținând cont că $t > 0$, reiese $t \in [\frac{1}{2}, 2]$.

8. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care au proprietatea $2f(f(x)) - 3f(x) + x = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Soluție. Fie $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = f(x) - x$. Atunci $g(x) = 2g(f(x))$, de unde $g(x) = 2^n g(f^{[n]}(x))$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (am notat $f^{[n]} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}$).

Reiese că $2^n | g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Se verifică imediat că funcția identică îndeplinește cerința.