

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA A 15-A
ETAPA MUNICIPALĂ – 28 MAI 2016



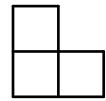
Clasa a IX-a

1. Fie A o mulțime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ și S o mulțime de submulțimi a lui A cu proprietățile:

- orice două mulțimi din S au cel puțin un element comun;
- dacă o submulțime M a lui A are cel puțin un element comun cu orice mulțime din S , atunci M face parte din S .

Arătați că S are 2^{n-1} elemente.

2. Demonstrați că, oricum am elimina un pătrat 1×1 de pe o tablă de șah de dimensiuni $2^n \times 2^n$ (unde $n \in \mathbb{N}^*$), pătratele rămasă pot fi acoperite complet cu $\frac{4^n - 1}{3}$ piese de forma alăturată (o piesă este alcătuită din trei pătrate 1×1).



3. Arătați că există numere întregi $m, n, p > 2^{670}$ astfel încât $mnp = 2^{2016} - 1$.

4. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B respectiv C ale triunghiului ABC . Arătați că, dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$, atunci triunghiul este echilateral.

5. Determinați cel mai mare și cel mai mic element al mulțimii

$$A = \left\{ n + \left[\frac{2016}{n} \right] \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2016 \right\}.$$

6. Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$.

7. Considerăm ecuația $2x^2 - 2mx + m^2 - 10m + 45 = 0$, unde necunoscuta este x și m este un parametru real. Arătați că dacă ecuația are rădăcini reale x_1, x_2 , atunci:

- x_1 și x_2 se află în intervalul $[5 - \sqrt{5}, 5 + \sqrt{5}]$;
- $\frac{x_1}{x_2} \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$.

8. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care au proprietatea

$$2f(f(x)) - 3f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{Z}.$$