Clasa a 10-a

1. Rezolvaţi ecuaţia $(3^x+2)^{\log_5 3} = 5^x - 2$.

Soluţie. Observăm că $x=1$ este soluţie **2p**

Ecuaţia se scrie $3^{x\log_5 3}(1+2/3^x)^{\log_5 3} = 5^x - 2$, sau $3^{x(\log_5 3-1)}(1+2/3^x)^{\log_5 3} = (5/3)^x - 2/3^x$ **4p**

Deoarece $\log_5 3 - 1 < 0$ şi $\log_5 3 > 0$, membrul stâng este produs de funcţii strict descrescătoare pozitive. Cum membrul drept defineşte o funcţie strict crescătoare, soluţia $x=1$ este unică.

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm a_n numărul submulţimilor nevide ale mulţimii $A_n = \{1,2,3,\dots,n\}$ care nu conţin numere consecutive. Arătaţi că $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$.

Soluţie. Să numim *rare* submulţimile de tipul cerut. Submulţimile rare ale lui A_{n+2} care nu-l conţin pe $n+2$ sunt cele a_{n+1} submulţimi rare ale lui A_{n+1} **4p**

Submulţimile rare ale lui A_{n+2} care îl conţin pe $n+2$ sunt cele a_n mulţimi de forma $M \cup \{n+2\}$, unde M este o submulţime rară a lui A_n, precum şi mulţimea $\{n+2\}$, adică $1+a_n$ mulţimi **6p**

3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care au proprietatea $f(C_n^m) = C_{f(n)}^{f(m)}, \forall m,n,\ 1 \le m \le n$.

Soluţie. Pentru $m=n$: $f(1) = C_{f(n)}^{f(n)} = 1$........ **1p**

Pentru $n = m+1$: $f(C_{m+1}^m) = C_{f(m+1)}^{f(m)}$. Pe de altă parte, $f(C_{m+1}^m) = f(C_{m+1}^1) = C_{f(m+1)}^{f(1)} = C_{f(m+1)}^1$ ... **5p**

Dacă există $m > 1$ astfel încât $f(m) = 1$ atunci $f(2) = 1$ (deoarece din condiţiile de existenţă a combinărilor reiese că f este crescătoare). Atunci $f(4) = C_{f(4)}^{f(2)} = f(C_4^2) = f(6) = C_{f(6)}^{f(2)} = f(C_6^2) = f(15) = \dots$ şi, din monotonie, $f(n) = a$ pentru $n \ge 4$. Din $f(15) = f(C_6^4) = C_{f(6)}^{f(4)} = C_a^a = 1$ reiese $a = 1$, deci $f(n) \equiv 1$ în acest caz **2p**

În caz contrar, $f(m+1) = f(m) + 1$ pentru $m \ne 1$. De aici, $f(n) = n + a$, $a \ge -2$, pentru $n \ge 2$. Din $f(C_4^2) = C_{f(4)}^{f(2)}$ obţinem $a + 6 = (a+4)(a+2)/2$, de unde $a^2 + 5a = 0$, deci $a = 0$ şi $f(n) \equiv n$ **2p**

4. Rezolvaţi $\operatorname{arctg}\frac{2}{x+2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-7}$.

Soluţie. Din $2\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-7} - \operatorname{arctg}\frac{2}{x+2}$, luând tangente, obţinem $\frac{2/(x-2)}{1-1/(x-2)^2} = \frac{1/(x-7)-2/(x+2)}{1+2/((x-7)(x+2))}$ şi, după calcule, $3x^3 - 34x^2 + 63x = 0$ **5p**

Soluţiile posibile sunt 0, 9 şi $\frac{7}{3}$ **2p**

0 şi 9 convin, iar $\frac{7}{3}$ nu convine **3p**

5. Arătaţi că $\sqrt[n]{2} + \sqrt[3]{3^n} > \sqrt[n]{3} + \sqrt{2^n}$ pentru $n \ge 6$.

Soluţie. Avem $\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} < 2 - 1 = 1$ şi arătăm că $(\sqrt[3]{3})^n - (\sqrt{2})^n \ge 1$ **4p**

Cum $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} > 1$, expresia $(\sqrt{2})^n((\sqrt[3]{3}/\sqrt{2})^n - 1)$ defineşte o funcţie strict crescătoare, a cărei valoare în punctul 6 este 1 .... **6p**

6. Rezolvaţi $\begin{cases} x+y+z = xyz \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ unde $x,y,z \in (0,\infty)$.

Soluţie. Fie $x = \operatorname{tg} a, y = \operatorname{tg} b, x = \operatorname{tg} c$, cu $a,b,c \in (0,\frac{\pi}{2})$. Atunci $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sin a$, etc.................. **4p**

Din $x + y = -z(1-xy)$ rezultă $\operatorname{tg}(a+b) = -\operatorname{tg} c$, deci $a+b+c = \pi$................................ **3p**

Din convexitatea funcţiei sin pe $(0,\pi)$ rezultă că egalitatea $\sin a + \sin b + \sin c = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sin\frac{a+b+c}{3}$ este posibilă doar pentru $a = b = c = \frac{\pi}{3}$, adică $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **3p**

7. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n) =$ numărul cuburilor perfecte din intervalul $[n^3,\ 3n^3]$ este surjectivă.

Soluţie. $g(n) = [n\sqrt[3]{3}] - n + 1$, deoarece cel mai mare cub perfect din intervalul dat este $[n\sqrt[3]{3}]$ **4p**

$g(n+1) - g(n) = [n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}] - [n\sqrt[3]{3}] - 1 \in \{0,1\}$ arată că şirul $(g(n))_n$ este crescător şi diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este cel mult 1, iar $g(n) > n(\sqrt[3]{3}-1)$ arată că şirul este nemărginit, deci mulţimea valorilor termenilor şirului este $\mathbb{N}^*$ **6p**

8. Fie $a \ge 2$ un număr natural şi $x = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$. Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural nenul n, există un număr natural b, $b \ge 2$, astfel încât $x^n = \frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$.

Soluţie. Observăm că $x = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ dacă şi numai dacă x este supraunitar şi $x + 1/x = a$ **4p**

Se demonstrează că, dacă $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$, atunci $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **3p**

Fie $x^n + \frac{1}{x^n} = b \in \mathbb{N}$; evident că $b \ge 2$. Cum $x > 1$, rezultă că $x^n > 1$, prin urmare $x^n = \frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$...... **3p**