Clasa a 11-a

1. Fie $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are un subşir $(a_{k_n})_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{k_{n+1}}} + \frac{1}{a_{k_{n+2}}} + \frac{1}{a_{k_{n+3}}} + \ldots + \frac{1}{a_{k_{2n}}}\right) = \ln 2$.

Soluţie. Se ştie că $a_n \to \infty$, $a_n - \ln n \to c$ (constanta lui Euler) şi $a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$ **3p**

Alegem $k_n = \min\{p \mid n \leq a_p\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Rezultă $n \leq a_{k_n} < n+1$, deoarece $a_{k_n} = a_{k_{n-1}} + \frac{1}{k_n} < n + \frac{1}{k_n} < n+1$ **4p**

Atunci $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{a_{k_{n+1}}} + \ldots + \frac{1}{a_{k_{2n}}} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, de unde concluzia **3p**

2. Rezolvaţi ecuaţia $x^3 + 3x^2 - x - 3 = \cos\frac{\pi x}{2}$.

Soluţie. Ecuaţia se scrie $(x-1)(x+1)(x+3) = \cos\frac{\pi x}{2}$ şi are soluţiile -3, -1 şi 1 .... **4p**

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 - \cos\frac{\pi x}{2}$. Dacă ecuaţia ar mai avea şi alte soluţii, atunci, din teorema lui Rolle, ecuaţia $f'''(x) = 0$ ar avea cel puţin o soluţie. Dar $f'''(x) = 6 - \frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi x}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **6p**

3. Rezolvaţi ecuaţia $3^x - 2^x = \log_3(x + 2^x)$.

Soluţie. Ecuaţia se scrie $3^x + \log_3(3^x) = 2^x + x + \log_3(2^x + x)$ **3p**

Deoarece funcţia $0 < t \mapsto t + \log_3 t$ este strict crescătoare, ecuaţia se reduce la $3^x = 2^x + x$ **3p**

Cum $3^x - 2^x = xc^{x-1}$, cu $c \in (2, 3)$ (depinzând de x), ecuaţia are doar soluţiile evidente 0 şi 1 .... **4p**

4. Arătaţi că, pentru orice $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$,

$$\frac{\ln x}{x^3-1} < \frac{1}{3}\,\frac{x+1}{x^3+x}.$$

Soluţie. Considerăm funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} - 3\ln x$ **3p**

$f'(x) = \frac{x^6-3x^5+3x^4-2x^3+3x^2-3x+1}{(x^3+x)^2} = \frac{(x^2+x+1)(x-1)^4}{(x^3+x)^2} \geq 0$, deci f este strict crescătoare. Concluzia reiese acum din $f(1) = 0$ **7p**

5. Fie $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Aflaţi $\det BA$.

Soluţie. Fie L linia a treia a lui A, C coloana a treia a lui B şi A', B' matricele obţinute prin ştergerea lui L, respectiv C. Atunci $A'B' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A'C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $LB' = (0\ 0)$ **2p**

Dacă L şi C sunt nule, atunci $BA = B'A'$, deci $\det BA = \det A' \det B' = \det A'B' = ad - bc$ **4p**

Dacă, de exemplu, $L = (x\ y)$, cu $x \neq 0$, atunci $xL_1 + yL_2 = (0\ 0\ 0)$, unde L_1, L_2 sunt liniile lui B, deci B are rangul cel mult 1. În acest caz $\det B' = 0$, $ad - bc = \det A'B' = 0$ şi BA are rangul cel mult 1, de unde $\det BA = ad - bc$ şi în acest caz **4p**

6. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX + XA$. Arătaţi că f este bijectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ şi $\det A \neq 0$.

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Atunci

$$AX + XA = \begin{pmatrix} 2ax + cy + bz & bx + (a+d)y + bt \\ cx + (a+d)z + ct & cy + bz + 2dt \end{pmatrix},$$

iar funcţia este bijectivă dacă şi numai dacă sistemul rezultat din explicitarea egalităţii $AX + XA = B$ are soluţie unică, oricare ar fi $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **4p**

Sistemul este liniar, iar determinantul sistemului este, după calcul, $\Delta = 4(ad - bc)(a + d)^2$. Din condiţia $\Delta \neq 0$ reiese că sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $a + d \neq 0$ şi $ad - bc \neq 0$ **6p**

7. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $x_n \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $x_n = \operatorname{arctg} x_n + \frac{1}{n}$. Determinaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Soluţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ este strict crescătoare şi surjectivă, deci ecuaţia $f(x) = \frac{1}{n}$ are soluţie unică **4p**

Din $f(0) < \frac{1}{n}$ rezultă $x_n > 0$ şi din $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ rezultă $x_n > x_{n+1}$, deci $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ **2p**

Avem $\ell = \operatorname{arctg} \ell$, de unde $\ell = 0$ **4p**

8. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, care comută între ele şi pentru care $\det(AB + BC + CA) \leq 0$. Arătaţi că $\det(A^2 + B^2 + C^2) \geq 0$.

Soluţie. Considerăm funcţia dată prin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A^2 + B^2 + C^2 + x(AB + BC + CA))$ .. **2p**

$f(2) = \det(A + B + C)^2 \geq 0$, $f(-1) = \det(X^2 + Y^2 + XY) \geq 0$, unde $X = A - B, Y = B - C$ **4p**

Funcţia f este de gradul II şi x^2 are coeficient pozitiv, sau de grad cel mult I; în ambele cazuri avem $f(0) \geq 0$ **4p**