Clasa a 12-a

1. Calculaţi $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{2}{t}$ integrala devine $\int_1^2 \frac{\ln 2 - \ln t}{(t+1)(t+2)}$ **7p**

Avem deci $I = \ln 2 \int_1^2 \frac{1}{(t+1)(t+2)} - I$, de unde obţinem $I = \frac{1}{2}\ln 2 \ln \frac{9}{8}$ **3p**

2. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k(n-1)}{n^2}\cos\frac{k(n+1)}{n^2}$.

Soluţie. $\sin\frac{k(n-1)}{n^2}\cos\frac{k(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\sin\frac{2k}{n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2k}{n^2}$. **2p**

$\frac{1}{2n}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k}{n^2}\right| \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \to 0$ **3p**

Limita cerută este, deci $\lim \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k}{n}$. Aceasta este suma Riemann pentru diviziunea $(0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{2n}{n})$ şi punctele intermediare $(\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{2n}{n})$ a funcţiei integrabile $\frac{1}{4}\sin : [0,2] \to \mathbb{R}$, deci $\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k}{n} \to \frac{1}{4}\int_0^2 \sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\cos 2 - 1)$ **5p**

3. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia dată de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{x^2 + ax + b, x + 1\}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ are valoare minimă.

Soluţie. Funcţia este derivabilă dacă şi numai dacă dreapta este situată sub parabolă (eventual tangentă), adică $(a-1)^2 - 4(b-1) \leq 0$ **3p**

În acest caz, $f(x) = x^2 + ax + b$ şi $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b \leq \frac{a^2}{4} + \frac{19}{12}$ **5p**

Valoarea $\frac{19}{12}$ se atinge pentru $a = 0$ şi $b = \frac{5}{4}$, deci aceasta este minimul cerut **2p**

4. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie care are o primitivă F astfel încât $x(f(x) + x^2) = 2F(x), \forall x > 0$. Ştiind că $f(1) = 1$, determinaţi $f(2)$.

Soluţie. Deoarece F este derivabilă, funcţia f este derivabilă **2p**

Avem $x^{-2}f(x) + 1 = 2x^{-3}F(x)$ şi, integrând pe $[1,2]$, $\int_1^2 2x^{-3}F(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_1^2 x^{-2}F'(x)\mathrm{d}x = 1 + x^{-2}F(x)|_1^2 - \int_1^2 (x^{-2})'F(x)\mathrm{d}x = 1 + \frac{F(2)}{4} - F(1) + \int_1^2 2x^{-3}F(x)\mathrm{d}x$. Deducem $F(2) = 4F(1) - 4 = 0$, deci $f(2) = -4$ .. **8p**

5. Fie $a \in (-\infty, 0)$, $b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = aX^4 + bX^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Arătaţi că f are exact două rădăcini reale.

Soluţie. $f(0) = 1 > 0$ şi $f(\pm\infty) = -\infty$, deci, din continuitate, f are cel puţin două rădăcini reale ... **4p**

Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile lui f, atunci $\sum x_k^{-2} = (\sum x_k^{-1})^2 - 2\sum x_k x_l^{-1} = 2^2 - 2\cdot 3 < 0$, deci f are o rădăcină $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Fiind polinom cu coeficienţi reali, f are şi rădăcina $\bar{z}$ **6p**

6. Arătaţi că rădăcinile polinomului $9X^3 - 36X^2 + 45X - 17$ pot fi laturile unui triunghi obtuzunghic.

Soluţie. $f' = 9(3X^2 - 8X + 5)$ are rădăcinile 1 şi 5/3, iar $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, $f(5/3) < 0$ şi $f(+\infty) > 0$, deci f are o rădăcină $x_1 \in (0,1)$, o rădăcină $x_2 \in (1, 5/3)$ şi o rădăcină $x_3 \in (5/3, \infty)$ **5p**

Pentru ca rădăcinile să poată fi laturile unui triunghi obtuzunghic, condiţia este $x_3 < x_1 + x_2$ şi $x_3^2 > x_1^2 + x_2^2$ $\iff$ $2x_3 < x_1 + x_2 + x_3$ şi $2x_3^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$ $\iff$ $\sqrt{3} < x_3 < 2$, ceea ce este adevărat, deoarece $f(\sqrt{3}) < 0$ şi $f(2) > 0$ **5p**

7. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel în care numărul elementelor nilpotente este egal cu numărul elementelor inversabile. Arătaţi că $1 + 1$ este nilpotent.

Soluţie. Dacă $x^n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = 1 - x^n = 1$, deci dacă x este nilpotent, atunci $1 - x$ este inversabil **4p**

Astfel, corespondenţa $x \mapsto 1 + x$ defineşte o funcţie injectivă f de la mulţimea N a elementelor nilpotente la mulţimea I a elementelor inversabile **3p**

Deoarece $|I| = |N|$, funcţia precedentă este şi bijectivă. Cum $-1 = 1 - (1+1) = f(1+1) \in I$, deducem că $1 + 1 \in N$ **3p**

8. Pentru un grup $(G, \cdot)$, notăm $Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$.

a) Arătaţi că, dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit necomutativ, atunci $|Z(G)| \leq \frac{1}{4}\,|G|$.

b) Daţi exemplu de grup finit G pentru care $|Z(G)| = \frac{1}{4}\,|G|$.

Soluţie. a) Fie $a \in G\setminus Z(G)$ şi $C(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$. Cum $C(a)$ este subgrup al lui G şi $C(a) \neq G$, $|C(a)| \leq |G|/2$ **4p**

Deoarece $Z(G)$ este subgrup al lui $C(a)$ şi $Z(G) \neq C(a)$, rezultă $|Z(G)| \leq |C(a)|/2$ **3p**

b) Fie grupul $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ cu $|G| = 8$ Atunci $Z(G) = \{I_3, A\}$, unde A se obţine pentru $a = c = \hat{0}, b = \hat{1}$, deci $|Z(G)| = 2$ **3p**