Clasa a 9-a

1. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ definim $M_{a,b} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid [an] = [bn]\}$.

a) Arătaţi că, dacă $a \neq b$, atunci $M_{a,b}$ este finită.

b) Determinaţi numărul elementelor lui $M_{\sqrt{6},\sqrt{5}}$.

Soluţie. a) Dacă $a > b$ şi $n \in M_{a,b}$, atunci $na - nb < 1$, deci $n < \frac{1}{a-b}$ – număr finit de valori **5p**

b) $n < \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \sqrt{6}+\sqrt{5} < 5$ şi convin doar valorile $n = 1$ şi $n = 2$ **5p**

2. Arătaţi că, dacă $x, y \in (0, \infty)$ şi $(x+1)(y+1) = 2$, atunci $xy + \frac{1}{xy} \geq 6$.

Soluţie. Din $2 = xy + x + y + 1 \geq xy + 2\sqrt{xy} + 1 = (\sqrt{xy} + 1)^2$, reiese $p = \sqrt{xy} \leq \sqrt{2} - 1$ **4p**

Deducem $p + \frac{1}{p} = \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \sqrt{p}\right)^2 + 2 \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2-1}} - (\sqrt{2} - 1)\right)^2 + 2 = 6$ **6p**

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 0$ şi $x_{n+1} = \frac{3x_n + \sqrt{5x_n^2 + 4}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că toţi termenii şirului sunt întregi.

Soluţie. Avem $(2x_{n+1} - 3x_n)^2 = 5x_n^2 + 4$, adică $x_{n+1}^2 - 3x_n x_{n+1} + x_n^2 = 1$ **3p**

Scriind relaţia similară pentru n şi $n - 1$ şi scăzând obţinem $(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-3x_n+x_{n-1}) = 0$. Deoarece $x_{n+1} > x_n > x_{n-1}$, prima paranteză nu poate fi nulă, deci $x_{n+1} - 3x_n + x_{n-1} = 0$ **5p**

Cum $x_1 = 2$, rezultă inductiv $x_n \in \mathbb{N}$ **2p**

4. a) Arătaţi că dacă $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ admite perioadele a, b, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ şi prime între ele, atunci f este constantă.

b) Arătaţi că dacă $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ au perioadele 3, 5, respectiv 7 şi funcţia $f + g + h$ este constantă, atunci f, g şi h sunt constante.

Soluţie. a) Există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ma + nb = 1$. Rezultă că f are perioada 1 .... **5p**

b) Funcţia $f + g$ are perioada 15 iar $f + g + h$ este constantă, deci h are perioada 15. Conform a), rezultă că h este constantă. Analog f şi g sunt constante . **5p**

5. Numerele reale x, y, z verifică relaţiile $x+y+z = 6$ şi $xy + xz + yz = 9$. Arătaţi că numerele sunt situate în intervalul $[0,\ 4]$.

Soluţie. Numerele x, y sunt soluţiile ecuaţiei $t^2 - (6 - z)t + 9 - 6z + z^2 = 0$ **5p**

Din $\Delta \geq 0$ rezultă $-3(z^2 - 4z) \geq 0$, deci $z \in [0,\ 4]$; analog avem $x, y \in [0,\ 4]$......................... **5p**

6. Se consideră 10 progresii aritmetice, având termenii numere naturale nenule, astfel încât fiecare număr natural nenul să fie termen al exact uneia dintre ele. Arătaţi că primul termen al fiecărei progresii nu depăşeşte raţia acesteia.

Soluţie. Dacă într-o progresie avem $a_1 > r_1$, atunci $a_1 - r_1$ este termen al unei alte progresii, deci $a_1 - r_1 = b_1 + nr_2$ **3p**

În acest caz, numărul $a_1 - r_1 + r_1 r_2 = a_1 + (r_2 - 1)r_1 = b_1 + (n + r_1)r_2$ face parte din ambele progresii contradicţie. **7p**

7. Să se arate că există numerele reale a, b, c astfel încât $a(\sin^6 x + \cos^6 x) + b(\sin^8 x + \cos^8 x) + c(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = 1$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $\sin^2 x \cos^2 x = y$. Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ reiese: $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2y$, $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - \sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3y$, $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x = 1 - 4y + 2y^2$, $\sin^{10} x + \cos^{10} x = (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^4 x\cos^4 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 5y + 5y^2$ **6p**

Relaţia devine $a+b+c-(3a+4b+5c)y+(2b+5c)y^2 = 1$ şi este îndeplinită pentru orice y dacă $a + b + c = 1, 3a+4b+5c = 0, 2b+c = 0 \Leftrightarrow a = 10, b = -15, c = 6$ **4p**

8. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale din intervalul $[0, 1]$. Arătaţi că există $x \in [0, 1]$ astfel încât

$$2\left(|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|\right) = n.$$

Soluţie. Putem presupune că $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Atunci funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|$ este liniară pe intervalele $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,...,$[x_n, 1]$ **3p**

Deducem că $I_0 = f([0, x_1])$, $I_1 = f([x_1, x_2])$,..., $I_n = f([x_n, 1])$ sunt intervale şi, cum $I_0 \cap I_1 \neq \phi$, $I_1 \cap I_2 \neq \phi$, ..., $I_{n-1} \cap I_n \neq \phi$, rezultă că $f([0, 1])$ este interval **4p**

Acest interval conţine $f(0) = x_1 + \ldots + x_n$ şi $f(1) = n - x_1 - \ldots - x_n$, deci şi $\frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{n}{2}$. Astfel, există un punct $x \in [0, 1]$ cu proprietatea $2f(x) = n$ **3p**