Clasa a 10-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia
$$3(x^2+3)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-2)=12x+\frac{1}{\log_{x+1}\sqrt[3]{3}}$$
Soluţie. Trebuie $x\in(1,+\infty)$, iar 3 este soluţie . . **2p**

Avem, echivalent, $\log_3\frac{2x-2}{x+1}=-x^2+4x-3$ **2p**

Pentru $x\in(1,3)$, $\log_3\frac{2x-2}{x+1}<0<-x^2+4x-3$, iar pentru $x\in(3,+\infty)$, $\log_3\frac{2x-2}{x+1}>0>-x^2+4x-3$, deci 3 este soluţie unică **6p**

2. Fie $n\neq 0$ un număr natural. Arătaţi că mulţimea $\{C_{2^n}^k \mid 1\leqslant k\leqslant 2^n-1\}$ are doar elemente pare.

Soluţie. Avem $C_{2^n}^k=\frac{2^n}{k}C_{2^n-1}^{k-1}$ **2p**

Numărul $A=C_{2^n-1}^{k-1}$ este întreg **4p**

După simplificare, numărătorul fracţiei $f=\frac{2^n}{k}$ este par, deci numărul întreg fA este par **4p**

3. Determinaţi tripletele (z_1,z_2,z_3) de numere complexe, de modul 1, care verifică relaţia $z_1^2+z_2^2+z_3^2=3z_1z_2z_3$.

Soluţie. $|\sum z_1^2|=3|z_1||z_2||z_3|=\sum|z_1^2|$ **3p**

Reiese că există $a,b\in\mathbb{R}_+$ astfel încât $z_2^2=az_1^2$, $z_3^2=bz_1^2$; luând module reiese $a=b=1$ **3p**

Dacă $z_1=z_2=z_3$ obţinem soluţia $(1,1,1)$, iar dacă $z_1=z_2=-z_3$ şi analoagele obţinem soluţiile $(1,1,-1)$ şi analoagele **4p**

4. Arătaţi că funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este crescătoare dacă şi numai dacă pentru orice $x,y>0$ avem $f\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right)\geqslant f\left(\frac{x+y}{3}\right)$.

Soluţie. Avem $3(x^3+y^3)=(x+y)(3x^2-3xy+3y^2)\geqslant(x+y)(x^2+xy+y^2),\forall x,y>0$, de unde „$\Rightarrow$” **3p**

Reciproc, dacă $a\geqslant b>0$, atunci sistemul simetric $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}=a$, $\frac{x+y}{3}=b$ duce la $S=3b$, $P(a-9b)=9b^2(a-3b)$. Dacă $a<3b$, ecuaţia $t^2-St+P=0$ are $\Delta=\frac{27b^2(a-b)}{9b-a}\geqslant 0$, $S>0$ şi $P>0$, deci are soluţii pozitive x_1, x_2. Folosind ipoteza pentru $x=x_1$, $y=x_2$ obţinem $f(a)\geqslant f(b)$ **4p**

Dacă $a\geqslant 3b$, există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^nb\leqslant a<2^{n+1}b$. Folosind observaţia precedentă obţinem $f(b)\leqslant f(2b)\leqslant\ldots\leqslant f(2^nb)\leqslant f(a)$. Astfel, $f(a)\geqslant f(b)$, oricare ar fi $a\geqslant b>0$ **3p**

5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia
$$\sqrt[3]{3x^2-6x+1}+\sqrt[3]{2x^2-3x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}=0.$$
Soluţie. Fie $2p=3x^2-6x+1$, $2q=x^2+1$. Atunci $2p+2q=2(2x^2-3x+1)$, deci ecuaţia este $\sqrt[3]{2p}+\sqrt[3]{2q}+\sqrt[3]{p+q}=0$ **3p**

Prin ridicare la cub rezultă $2p+2q-3\sqrt[3]{4pq(p+q)}=-p-q$, de unde $(p+q)(p-q)^2=0$ **4p**

În cazul $p=q$ obţinem $p=q=0$, imposibil **1p**

În cazul $p+q=0$ obţinem soluţiile 1 şi $\frac{1}{2}$ **2p**

6. Arătaţi că, dacă funcţia $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ are proprietatea $f(x^2+x)\leqslant x\leqslant f^2(x)+f(x)$, oricare ar fi $x\geqslant 0$, atunci ea este inversabilă.

Soluţie. Ipoteza este $f(g(x))\leqslant x\leqslant g(f(x))$, unde $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g(x)=x^2+x$ **3p**

Funcţia g este strict crescătoare şi inversabilă, deci g^{-1} are aceleaşi proprietăţi **2p**

Pentru $x=g^{-1}(t)$ avem $f(t)\leqslant g^{-1}(t),\forall t\geqslant 0$ . . . **2p**

Apoi $g^{-1}(x)\leqslant g^{-1}(g(f(x)))=f(x),\forall x\geqslant 0$, ceea ce arată că $f=g^{-1}$ **3p**

7. Determinaţi numerele naturale a pentru care există o funcţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n))=n+a$, oricare ar fi numărul natural n.

Soluţie. Dacă $a=2b$, $b\in\mathbb{N}$, atunci funcţia $n\mapsto n+b$ convine, deci orice a par convine **2p**

Avem $f(f(f(n)))=f(n+a)=f(n)+a$ **2p**

Arătăm că a impar nu convine.

Considerăm mulţimea $A=\mathbb{N}\setminus f(\mathbb{N})$. Deoarece $\{a+n\mid n\in\mathbb{N}\}\subset f(\mathbb{N})$, A este finită. Cum funcţia $f\circ f$ este injectivă, şi funcţia f este injectivă, deci $f(A)=f(\mathbb{N})\setminus f(f(\mathbb{N}))=f(\mathbb{N})\setminus\{a+n\mid n\in\mathbb{N}\}$. Rezultă că $A\cup f(A)=\{0,1,\ldots,a-1\}$ – o mulţime cu a elemente. Aceasta contrazice faptul că $|A|=|f(A)|$, A şi $f(A)$ sunt disjuncte iar a este impar **6p**

8. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin^5x-\cos^3x=1$.

Soluţie. Avem $|\sin^5x-\cos^3x|\leqslant|\sin^5x|+|\cos^3x|\leqslant\sin^2x+\cos^2x=1$ **2p**

Pentru egalitate este necesar ca $\sin x\in\{-1,0,1\}$ şi $\cos x\in\{-1,0,1\}$, deci $x=n\pi/2$, $n\in\mathbb{Z}$ **4p**

Valorile $n=4k$ şi $n=4k+3$, $k\in\mathbb{Z}$ nu convin, iar valorile $n=4k+1$ şi $n=4k+2$, $k\in\mathbb{Z}$ convin **4p**