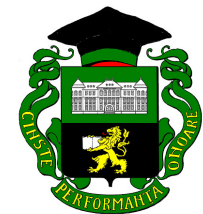


CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA A 8-A  
ETAPA MUNICIPALĂ - 6 MAI 2023



Colegiul Național Gheorghe Șincai

**Clasa a 10-a**

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$3(x^2 + 3) + \log_{\sqrt[3]{3}}(2x - 2) = 12x + \frac{1}{\log_{x+1} \sqrt[3]{3}}$$

2. Fie  $n \neq 0$  un număr natural. Arătați că mulțimea

$$\{C_{2^n}^k \mid 1 \leq k \leq 2^n - 1\}$$

are doar elemente pare.

3. Determinați tripletele  $(z_1, z_2, z_3)$  de numere complexe, de modul 1, care verifică relația  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3z_1z_2z_3$ .

4. Arătați că funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este crescătoare dacă și numai dacă pentru orice  $x, y > 0$  avem

$$f\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}\right) \geq f\left(\frac{x + y}{3}\right).$$

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt[3]{3x^2 - 6x + 1} + \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 1} = 0.$$

6. Arătați că, dacă funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  are proprietatea  $f(x^2 + x) \leq x \leq f^2(x) + f(x)$ , oricare ar fi  $x \geq 0$ , atunci ea este inversabilă.

7. Determinați numerele naturale  $a$  pentru care există o funcție  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  astfel încât  $f(f(n)) = n + a$ , oricare ar fi numărul natural  $n$ .

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sin^5 x - \cos^3 x = 1$ .