CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIŢIA A 8-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 6 MAI 2023

Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 10-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia
$$3(x^2+3)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-2)=12x+\frac{1}{\log_{x+1}\sqrt[3]{3}}$$

2. Fie $n \neq 0$ un număr natural. Arătaţi că mulţimea
$$\{C_{2^n}^k \mid 1 \leqslant k \leqslant 2^n-1\}$$
are doar elemente pare.

3. Determinaţi tripletele (z_1, z_2, z_3) de numere complexe, de modul 1, care verifică relaţia $z_1^2+z_2^2+z_3^2=3z_1z_2z_3$.

4. Arătaţi că funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este crescătoare dacă şi numai dacă pentru orice $x, y>0$ avem
$$f\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right)\geqslant f\left(\frac{x+y}{3}\right).$$

5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia
$$\sqrt[3]{3x^2-6x+1}+\sqrt[3]{2x^2-3x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}=0.$$

6. Arătaţi că, dacă funcţia $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ are proprietatea $f(x^2+x)\leqslant x\leqslant f^2(x)+f(x)$, oricare ar fi $x\geqslant 0$, atunci ea este inversabilă.

7. Determinaţi numerele naturale a pentru care există o funcţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n))=n+a$, oricare ar fi numărul natural n.

8. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin^5 x-\cos^3 x=1$.