Clasa a 11-a

1. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Arătaţi că inversa matricei $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $a_{i,i} = 0$ şi $a_{i,j} = 1$, oricare ar fi $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$ este de forma $\alpha A + \beta I_n$.

Soluţie. Avem $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$ **5p**

Relaţia $A\left(\frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I_n\right) = \left(\frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I_n\right)A = I_n$ arată că inversa lui A este $\frac{1}{n-1}A + \frac{n-2}{n-1}I_n$ **5p**

2. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Calculaţi determinantul matricei $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $a_{i,j} = |i-j|$, oricare ar fi $i, j = \overline{1,n}$.

Soluţie. Scădem coloane: $C_n - C_{n-1}$, $C_{n-1} - C_{n-2}, \ldots, C_2 - C_1$ **3p**

Adunând la linia n linia 1 şi dezvoltând după ultima linie, obţinem $\det A = (n-1)(-1)^{n+1}\det B$, unde $B = (b_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-1}}$, cu $b_{i,j} = 1$ dacă $i < j$ şi $b_{i,j} = -1$ dacă $i \geqslant j$.. **4p**

Prin adunarea primei linii la celelalte, obţinem $\det B = 2^{n-2}$, deci $\det A = (-1)^{n+1}2^{n-2}(n-1)$................ **3p**

3. Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Arătaţi că BA are rangul 2 şi că matricea $BA - 2I_2$ este inversabilă.

Soluţie. Avem $2 = \text{rang}(AB)^2 = \text{rang}A(BA)B \leqslant \text{rang}(BA)$ şi $BA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci $\text{rang}(BA) = 2$ **4p**

Ecuaţia caracteristică a matricei AB este $(AB)^3 - 4(AB)^2 + 3AB = O_3$.................................. **2p**

Înmulţind la dreapta cu A şi la stânga cu B rezultă $(BA)^4 - 4(BA)^3 + 3(BA)^2 = O_2$. Cum BA este inversabilă, reiese $(BA)^2 - 4(BA) + 3I_2 = O_2$, de unde $(BA - 2I_2)^2 = I_2$, deci $(BA - 2I_2)^{-1} = BA - 2I_2$........................ **4p**

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă şi $f'(0) \neq 0$. Determinaţi valorile lui n pentru care limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\text{tg}x) - f(\sin x)}{x^n}$ există şi este finită.

Soluţie. $\frac{f(\text{tg}x)-f(\sin x)}{x^n} = \frac{f(\text{tg}x)-f(\sin x)}{\text{tg}x - \sin x}\frac{\text{tg}x - \sin x}{x^3}\frac{1}{x^{n-3}}$ ... **4p**

Cu teorema lui Lagrange, prima fracţie este $f'(c_x)$, cu c_x între $\sin x$ şi $\text{tg}x$, iar $f'(x) \overset{x\to 0}{\to} f'(0)$................ **2p**

Cu l'Hospital, a doua fracţie $\overset{x\to 0}{\to} 1/2$............... **2p**

Limita este finită pentru $n \leqslant 3$..................... **2p**

5. Fie $a > 1$. Arătaţi că există o funcţie unică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aşa încât $\ln(f^2(x) + 1) + af(x) = x$, oricare ar fi numărul real x, iar f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Avem $g(f(x)) = x$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \ln(t^2 + 1) + at$ **4p**

Din $g'(t) = \frac{2t}{t^2+1} + a > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$ rezultă că g este inversabilă **4p**

Avem $f = g^{-1}$ şi, cum g este derivabilă iar $g'(x) \neq 0$, rezultă ultima cerinţă.. **2p**

6. Fie A, B matrice de ordin 3, cu elemente numere reale, astfel încât $|\det(A + xB)| \leqslant 1$, pentru orice număr complex x de modul 1. Arătaţi că $|\det A| \leqslant 1$.

Soluţie. Determinantul $\det(A + xB) := f(x)$ este o funcţie polinomială de forma $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, cu $a = f(0) = \det A$....................................... **4p**

Avem $|4a| = |f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i)| \leqslant 4$, de unde rezultă imediat concluzia **6p**

7. Se consideră un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_0 \in [0, 6]$ şi $x_{n+1} = \sqrt{6 - x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Studiaţi convergenţa şirului şi aflaţi-i limita, când aceasta există.

Soluţie. Avem $x_{n+2} = \sqrt{6 - \sqrt{6 - x_n}}$, deci diferenţele $x_{n+4} - x_{n+2}$ şi $x_{n+2} - x_n$ au acelaşi semn, ceea ce arată că subşirurile (x_{2n}) şi (x_{2n+1}) sunt monotone **4p**

Ele sunt şi mărginite, fiind incluse în $[0, 6]$.......... **2p**

Dacă $(x_{2n}) \to \ell$, $\ell \in [0, 6]$, atunci $\ell = \sqrt{6 - \sqrt{6 - \ell}}$, de unde $6 - \ell^2 = \sqrt{6 - \ell}$, apoi $\ell^4 - 12\ell^2 + \ell + 30 = 0$ şi $\ell^2 \leq 6$. Obţinem $(\ell - 2)(\ell + 3)\,(\ell^2 - \ell - 5) = 0$, cu singura soluţie acceptabilă $\ell = 2$, deci $(x_{2n}) \to 2$. În mod similar subşirul (x_{2n+1}) are limita 2, deci limita şirului este 2, oricare ar fi x_0 .... **4p**

8. Fie $n \geq 2$ un număr natural, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ numere reale distincte două câte două şi a un număr real pozitiv, diferit de 1. Arătaţi că

$$D(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \ldots & r_n^{n-2} \\ a^{r_1} & a^{r_2} & \ldots & a^{r_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = D(r_1, \ldots, r_{n-1}, x)$; observăm că f are zerourile distincte $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$..... **3p**

Să presupunem că f mai are şi zeroul r_n, diferit de zerourile precedente. Atunci, confrom teoremei lui Rolle, f' are cel puţin $n-1$ zerouri distincte, f'' are cel puţin $n-2$ zerouri distincte, ..., $f^{(n-1)}$ are cel puţin un zero..... **4p**

Dar, $f^{(n-1)}(x) = a^x(\ln a)^{n-2}V(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$, unde V este determinantul Vandermonde de ordin $n-1$, deci $f^{(n-1)}$ nu are rădăcini. Aceasta arată că presupunerea făcută este falsă... **3p**