CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIŢIA A 8-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 6 MAI 2023

Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 11-a

1. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Arătaţi că inversa matricei $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $a_{i,i} = 0$ şi $a_{i,j} = 1$, oricare ar fi $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$ este de forma $\alpha A + \beta I_n$.

2. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Calculaţi determinantul matricei $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $a_{i,j} = |i - j|$, oricare ar fi $i, j = \overline{1,n}$.

3. Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Arătaţi că BA are rangul 2 şi că matricea $BA - 2I_2$ este inversabilă.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă şi $f'(0) \neq 0$. Determinaţi valorile lui n pentru care limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\mathrm{tg}x) - f(\sin x)}{x^n}$$

există şi este finită.

5. Fie $a > 1$. Arătaţi că există o funcţie unică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aşa încât $\ln(f^2(x) + 1) + af(x) = x$, oricare ar fi numărul real x, iar f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

6. Fie A, B matrice de ordin 3, cu elemente numere reale, astfel încât $|\det(A+xB)| \leqslant 1$, pentru orice număr complex x de modul 1. Arătaţi că $|\det A| \leqslant 1$.

7. Se consideră un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_0 \in [0, 6]$ şi $x_{n+1} = \sqrt{6 - x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Studiaţi convergenţa şirului şi aflaţi-i limita, când aceasta există.

8. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ numere reale distincte două câte două şi a un număr real pozitiv, diferit de 1. Arătaţi că

$$D(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \ldots & r_n^{n-2} \\ a^{r_1} & a^{r_2} & \ldots & a^{r_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$