## Clasa a 12-a

**1.** Calculaţi $I = \int_1^{\sqrt{2}} (x^3+3x^2+2x)e^{x-\frac{2}{x}}dx$.

*Soluţie.* $J = \int_1^{\sqrt{2}} x(x^2+2)e^{x-\frac{2}{x}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} x^3(e^{x-\frac{2}{x}})'$ $= 2\sqrt{2} - \frac{1}{e} - \int_1^{\sqrt{2}} 3x^2 e^{x-\frac{2}{x}}dx = 2\sqrt{2} - \frac{1}{e} - K$ ......... **7p**

$I = K + J = 2\sqrt{2} - \frac{1}{e}$ ............................ **3p**

**2.** Calculaţi $I = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2+2x+3}dx$.

*Soluţie.* Schimbarea de variabilă $x = \frac{3}{t}$ dă $I = \int_3^1 \frac{\ln 3 - \ln t}{9/t^2+6/t+3}\cdot\left(-\frac{3}{t^2}\right)dt = \int_1^3 \frac{\ln 3}{t^2+2t+3}dt - I$ ............ **7p**

Rezultă $I = \frac{\ln 3}{\sqrt{8}}(\text{arctg}\sqrt{8} - \text{arctg}\sqrt{2})$ ............... **3p**

**3.** Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) + f(x) = |x|$, oricare ar fi numărul real $x$.

*Soluţie.* Pentru $x \geqslant 0$ avem $(F(x)e^x)' = xe^x$ ........ **3p**

Rezultă $F(x)e^x = (x-1)e^x + c_1, \forall x \geqslant 0$ ........... **2p**

Analog $F(x)e^x = (1-x)e^x + c_2, \forall x < 0$ şi, din continuitatea lui $F$, $c_2 = c_1 - 2$. Reiese astfel

$F(x) = \begin{cases} x - 1 + ce^{-x}, x \geqslant 0 \\ 1 - x + (c-2)e^{-x}, x < 0 \end{cases}$ ................. **2p**

Se verifică imediat că funcţia $F$ este derivabilă şi că $f(x) = \begin{cases} 1 - ce^{-x}, x \geqslant 0 \\ -1 - (c-2)e^{-x}, x < 0 \end{cases}$ convine ............ **3p**

**4.** Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie integrabilă, $a = \int_0^1 f(x)dx$ şi $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Arătaţi că $\int_0^a g(x)dx \leqslant \int_0^1 f(x)g(x)dx \leqslant \int_{1-a}^1 g(x)dx$.

*Soluţie.* Observăm că prima inegalitate este echivalentă cu $\int\limits_0^a g(x)(1-f(x))dx \leqslant \int\limits_a^1 g(x)f(x)dx$ ................ **3p**

Pe $[a,1]$, $f(x) \geqslant 0$ şi $g(x) \geqslant g(a)$, deci $\int\limits_a^1 g(x)f(x)dx \geqslant g(a)\int\limits_a^1 f(x)dx$; analog $\int\limits_0^a g(x)(1-f(x))dx \leqslant g(a)\int\limits_0^a(1-f(x))dx = g(a)\left(a - \int\limits_0^a f(x)dx\right) = g(a)\int\limits_a^1 f(x)dx$, ceea ce probează prima inegalitate ......................... **5p**

A doua inegalitate se demonstrează analog ......... **2p**

**5.** Fie $n \geqslant 3$ şi $\sigma$ o permutare din $S_n$ cu cel puţin două puncte fixe. Arătaţi că numărul permutărilor pare care comută cu $\sigma$ este egal cu numărul permutărilor impare care comută cu $\sigma$.

*Soluţie.* Dacă $a$ şi $b$ sunt puncte fixe ale lui $\sigma$, $a \neq b$, transpoziţia $t = (a,b)$ comută cu $\sigma$ .................... **3p**

Apoi, dacă $f$ comută cu $\sigma$, atunci $(tf)\sigma = t(f\sigma) = t(\sigma f) = \ldots = \sigma(tf)$, deci şi $tf$ comută cu $\sigma$ .......... **4p**

Corespondenţa $f \mapsto tf$ defineşte o funcţie bijectivă de la mulţimea permutărilor pare care comută cu $\sigma$ la mulţimea permutărilor impare care comută cu $\sigma$, de unde concluzia cerută ........................................ **3p**

**6.** Dacă $x_1, x_2, x_3$ sunt rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^3+x+1=0$, calculaţi $E = \frac{x_1^4+1}{x_2x_3+1}\cdot\frac{x_2^4+1}{x_1x_3+1}\cdot\frac{x_3^4+1}{x_1x_2+1}$.

*Soluţie.* Observăm că $\frac{x_1^4+1}{x_2x_3+1} = \frac{-x_1^2-x_1+1}{-1/x_1+1} = \frac{x_1-x_1^2-x_1^3}{x_1-1} = \frac{1+2x_1-x_1^2}{x_1-1} = 1 - x_1 - \frac{2}{1-x_1} = y_1 - \frac{2}{y_1}$ ................ **3p**

$y_1, y_2, y_3$ sunt rădăcinile ecuaţiei $(1-y)^3+(1-y)+1=0$, adică $y^3 - 3y^2 + 4y - 3 = 0$ ......................... **3p**

$E = \prod(y_1 - \frac{2}{y_1}) = y_1y_2y_3 - 2\sum\frac{y_1y_2}{y_3} + 4\sum\frac{y_1}{y_2y_3} - \frac{8}{y_1y_2y_3} = 3 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = 3$............................ **4p**

**7.** Fie $G$ un grup şi $H$ un subgrup al lui $G$, cu $H \neq G$. Arătaţi că, dacă orice două elemente din $G \setminus H$ comută, atunci grupul $G$ este comutativ.

*Soluţie.* Observăm că, dacă $x \in H$ şi $y \in G \setminus H$ atunci $z = xy \in G \setminus H$ (în caz contrar $y = x'z \in H$).......... **3p**

Dacă $x \in H$ şi $y \in G \setminus H$, atunci $y(xy) = (xy)y$ şi, prin simplificare cu $y$, $yx = xy$ (1) ...................... **3p**

Dacă $x, y \in H$, atunci luăm $z \in G \setminus H$; din ipoteză avem $(xz)(yz) = (yz)(xz)$ şi folosind (1) reiese $xyz^2 = yxz^2$, deci $xy = yx$ ........................................ **4p**

**8.** Fie şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, cu $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2}\sum\limits_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{a_n^2}{a_k^2}}$.

*Soluţie.* $E_n = \frac{1}{a_n^2}\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{1+\frac{a_n^2}{a_k^2}} = \frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\sqrt{1+\frac{a_k^2}{a_n^2}} = \sum\limits_{k=1}^n\left(\frac{a_{k+1}}{a_n} - \frac{a_k}{a_n}\right)\sqrt{1+\frac{a_k^2}{a_n^2}}$, deci $E_n$ este o sumă Riemann asociată intervalului $[0,1]$, diviziunii $\Delta_n = (0, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_n}{a_n})$ şi punctelor intermediare $(\frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_n}{a_n})$ pentru funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$........................ **7p**

Deoarece $\frac{a_{k+1}-a_k}{a_n} = \frac{1}{a_ka_n} \leqslant \frac{M}{a_n}$ şi $\frac{a_1}{a_n} \leqslant \frac{M}{a_n}$, unde $M = \max\{a_1, \frac{1}{a_1}\}$, $||\Delta_n|| \leqslant \frac{M}{a_n} \to 0$ (pentru că $a_n \to \infty$) iar funcţia este integrabilă, limita cerută este $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$ ........................................ **3p**