

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA A 8-A  
ETAPA MUNICIPALĂ - 6 MAI 2023



Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 12-a

1. Calculați  $I = \int_1^{\sqrt{2}} (x^3 + 3x^2 + 2x)e^{x-\frac{2}{x}} dx$ .

2. Calculați  $I = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2 + 2x + 3} dx$ .

3. Determinați funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care au o primitivă  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $F(x) + f(x) = |x|$ , oricare ar fi numărul real  $x$ .

4. Fie  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  o funcție integrabilă,  $a = \int_0^1 f(x) dx$  și  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție crescătoare. Arătați că

$$\int_0^a g(x) dx \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_{1-a}^1 g(x) dx.$$

5. Fie  $n \geq 3$  și  $\sigma$  o permutare din  $S_n$  cu cel puțin două puncte fixe. Arătați că numărul permutărilor pare care comută cu  $\sigma$  este egal cu numărul permutărilor impare care comută cu  $\sigma$ .

6. Dacă  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile complexe ale ecuației  $x^3 + x + 1 = 0$ , calculați

$$E = \frac{x_1^4 + 1}{x_2x_3 + 1} \cdot \frac{x_2^4 + 1}{x_1x_3 + 1} \cdot \frac{x_3^4 + 1}{x_1x_2 + 1}.$$

7. Fie  $G$  un grup și  $H$  un subgrup al lui  $G$ , cu  $H \neq G$ . Arătați că, dacă orice două elemente din  $G \setminus H$  comută, atunci grupul  $G$  este comutativ.

8. Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , cu  $a_1 > 0$  și  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ . Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{a_n^2}{a_k^2}}.$$