

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA A 8-A  
ETAPA MUNICIPALĂ - 6 MAI 2023



Colegiul Național Gheorghe Șincai

**Clasa a 9-a**

1. Fie  $ABCDEF$  un hexagon regulat și punctele  $M$  și  $N$  situate pe diagonalele  $CF$ , respectiv  $CE$ , astfel încât  $\frac{CM}{CF} = \frac{EN}{EC} = r$ , unde  $r$  este un număr real pozitiv. Determinați valoarea lui  $r$  pentru care punctele  $B, M, N$  sunt coliniare.

2. Pe laturile triunghiului  $ABC$  construim în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele  $ABF$  și  $ACE$ , cu  $AB = AF$  și  $AC = AE$ . Fie  $M$  și  $N$  mijloacele segmentelor  $BC$  și  $EF$ . Arătați că  $MN \perp BC$

3. Arătați că numărul  $a = \sqrt{3} \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$  este rațional.

4. Arătați că, dacă într-un triunghi avem  $h_a + h_b + h_c = 4R + r$ , atunci triunghiul este echilateral.

5. Fie  $a, b, c$  numere reale și funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Arătați că, dacă ecuația  $f(x) = x$  nu are soluții reale, atunci nici ecuația  $f(f(x)) = x$  nu are soluții reale.

6. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul 
$$\begin{cases} x^2 y^2 - 8|x| + y^2 = 0 \\ y^3 - 13 = 5x^2(x^2 - 2). \end{cases}$$

7. Arătați că toți termenii șirului dat de  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ ,  $\forall n \geq 1$  sunt numere naturale.

8. Arătați că, dacă  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sunt cifre, atunci șirul  $(\sqrt{n})_{n \geq 1}$  are o infinitate de termeni care au primele  $p$  cifre după virgulă  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , în această ordine.