Clasa a 10-a

1. Arătaţi că numerele $\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}$, unde $n \geqslant 2$ este un număr natural, au aceeaşi primă zecimală.

Soluţie. $[\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}] = n$ **3p**

Arătăm că $n + \frac{3}{5} \leqslant \sqrt[3]{n^3+2n^2+n} < n + \frac{7}{10}$ **3p**

Prima inegalitate se reduce la $\frac{n^2}{5} - \frac{2}{25}n \geqslant \frac{27}{125}$, iar a doua la $\frac{n^2}{10} + \frac{47}{100}n + \frac{343}{1000} > 0$ - adevărat **4p**

2. Rezolvaţi ecuaţia $\log_3(x-1) + 2^{x^2-x} = 1 + 8^x$, $x \in (1, \infty)$.

Soluţie. $x = 4$ este soluţie **2p**

Pentru $x > 4$ avem $\log_3(x-1)+2^{x(x-1)} > \log_3 3+2^{3x}$, deci nu avem soluţii în $(4, \infty)$; pentru $x \in (1, 4)$ avem un argument similar, deoarece $x(x-1) < 3x$ **8p**

3. Arătaţi că, dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $|z^2+z+1|+|z+1| = 1$, atunci $|z| = 1$.

Soluţie. Dacă $|z| > 1$, atunci $|z^2+z+1|+|z+1| \geqslant |z^2+z+1-(z+1)| = |z^2| > 1$ **4p**

Pentru $|z| < 1$, $|z^2+z+1|+|z+1| > |z^2+z+1| + |z^2+z| \geqslant |z^2+z+1-(z^2+z)| = 1$ **6p**

4. Arătaţi că ecuaţia $\sqrt{6x+4}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x} = 4$ se poate scrie în forma $A(\sqrt{6x+4}+a)^2+B(\sqrt{1-x}+b)^2 + C(\sqrt{1-2x}+c)^2 = 0$, cu A, B, C, a, b, c numere reale, $A, B, C > 0$ şi rezolvaţi-o.

Soluţie. Se pot lua $A = 1$, $B = C = 2$, $a = -2$, $b = c = -1$ **6p**

Soluţia este $x = 0$ **4p**

5. Arătaţi că $(np)!$ este divizibil cu $(p!)^n$, oricare ar fi numerele naturale nenule n şi p.

Soluţie. Arătăm prin inducţie după n că $a_p(n) = (p!)^n \mid (np)! = b_n(p), \forall p \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n = 1$ este evident **2p**

Presupunem proprietatea adevărată pentru un anumit n. Avem $a_p(n+1) = a_p(n) \cdot p!$ şi $b_p(n+1) = b_n(p) \cdot (np+1)(np+2)\ldots(np+p)$ **2p**

Deoarece $\frac{(np+1)(np+2)\ldots(np+p)}{p!} = C_{np+p}^{p} \in \mathbb{N}$, rezultă că proprietatea este adevărată şi pentru $n+1$ **6p**

6. Rezolvaţi ecuaţia $\arcsin \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} = 2\mathrm{arctg}\, \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Soluţie. Trebuie $x > -\frac{1}{2}$ şi $\sqrt{2x+1} \leqslant x+1$, deci $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ **2p**

Avem $\mathrm{tg} \arcsin a = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, deci $\mathrm{tg}(\arcsin \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$ **3p**

Avem $\mathrm{tg}(2\,\mathrm{arctg}\, b) = \frac{2b}{1-b^2}$, deci $\mathrm{tg}(2\mathrm{arctg}\, \frac{1}{\sqrt{2x+1}}) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$ **3p**

Cum $\arcsin a, 2\,\mathrm{arctg}\, 2b \in (0, \pi)$, rezultă că egalitatea este valabilă pentru orice x din domeniu, deci ecuaţia are mulţimea soluţiilor $(-\frac{1}{2}, \infty)$ **2p**

7. Fie k şi n numere naturale nenule şi mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = A$. Soluţiile $(A, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ şi $(\emptyset, \ldots, \emptyset, A)$ se consideră a fi diferite.

Soluţie. O soluţie corespunde unei repartizări a elementelor lui A la mulţimile $X_1, \ldots, X_n$, astfel încât fiecare element să aparţină cel puţin unui X_i **2p**

Deoarece repartizarea lui i este independentă de repartizarea lui j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, reiese că numărul posibilităţilor de repartizare a elementelor 1, 2, ..., n este r^n, unde r este numărul posibilităţilor de repartizare a unui element oarecare e **4p**

Numărul r corespunde numărului posibilităţilor de a alege cel puţin una dintre mulţimile $X_1, \ldots, X_k$, care este numărul submulţimilor nevide ale mulţimii $1, 2, \ldots, k$. Rezultă $r = 2^k - 1$, iar numărul cerut este $(2^k-1)^n$ **4p**

8. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC construim în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele ABM $(AB = BM)$ şi ACN $(AC = CN)$. Arătaţi că dreptele BN şi CM se taie pe înălţimea din A a triunghiului ABC.

Soluţie. Alegând ca axe de coordonate BC şi înălţimea din A, avem $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$..... **2p**

Pentru $a > 0$ şi $b < c$ avem $M(-a+b, -b)$ şi $N(c+a, c)$.. **4p**

Ecuaţiile dreptelor BN şi CM sunt $y(c+a-b) = c(x-b)$, respectiv $y(c+a-b) = b(x-c)$ şi au punctul comun $(0, \frac{-bc}{a-b+c})$, situat pe Ox **4p**