CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIŢIA 9-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 18 MAI 2024

Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 10-a

1. Arătaţi că numerele $\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}$, unde $n \geqslant 2$ este un număr natural, au aceeaşi primă zecimală.

2. Rezolvaţi ecuaţia $\log_3(x-1)+2^{x^2-x}=1+8^x$, $x \in (1,\infty)$.

3. Arătaţi că, dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $|z^2+z+1|+|z+1|=1$, atunci $|z|=1$.

4. Arătaţi că ecuaţia

$$\sqrt{6x+4}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=4$$

se poate scrie în forma

$$A(\sqrt{6x+4}+a)^2+B(\sqrt{1-x}+b)^2+C(\sqrt{1-2x}+c)^2=0,$$

cu A,B,C,a,b,c numere reale, $A,B,C>0$ şi rezolvaţi-o.

5. Arătaţi că $(np)!$ este divizibil cu $(p!)^n$, oricare ar fi numerele naturale nenule n şi p.

6. Rezolvaţi ecuaţia $\arcsin\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+1}=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

7. Fie k şi n numere naturale nenule şi mulţimea $A=\{1,2,\ldots,n\}$. Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k=A$. Soluţiile $(A,\emptyset,\ldots,\emptyset)$ şi $(\emptyset,\ldots,\emptyset,A)$ se consideră a fi diferite.

8. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC construim în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele ABM $(AB=BM)$ şi ACN $(AC=CN)$. Arătaţi că dreptele BN şi CM se taie pe înălţimea din A a triunghiului ABC.