CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIŢIA 9-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 18 MAI 2024

Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 11-a

1. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea $f(x) = f(\sin x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir dat de $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{a_n}$, oricare ar fi $n \geqslant 1$. Arătaţi că $a_n \to 1$.

3. a) Daţi exemplu de o matrice nenulă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care există $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB - BA = A$.

b) Arătaţi că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $AB - BA = A$, atunci A este neinversabilă.

4. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi are cu proprietatea: pentru orice $a < b \in \mathbb{R}$ există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(b) - f'(a) = 6c(b - a)$. Arătaţi că f este de două ori derivabilă şi determinaţi f.

5. Aflaţi distanţa dintre graficele funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

Distanţa dintre mulţimile de puncte A şi B este $\inf\{PQ \mid P \in A, Q \in B\}$.

6. Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A^t = A^{-1}$ şi $\operatorname{tr}(A) = 3$, atunci $A = I_3$.

7. a) Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\det(A^2+I_2) = 0$, atunci $A^2+I_2 = 0_2$.

b) Arătaţi că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $X^3 - 4X^2 + 5X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, atunci $X^2 = 4X$.

8. Fie $n \geqslant 3$ un număr natural şi

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots,$$
$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots,$$
$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots.$$

Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} a_n & b_n & c_n \\ c_n & a_n & b_n \\ b_n & c_n & a_n \end{vmatrix} = 2^n.$$