Clasa a 12-a

1. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t - x}{x^3}$.

Soluţie. Putem aplica l'Hospital pentru cazul 0/0 ... **3p**

Limita devine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$ ... **7p**

2. Fie funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

a) Arătaţi că suma $f(x)+f\left(\frac{2-x}{1+2x}\right)$ nu depinde de x.

b) Calculaţi $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x)}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$.

Soluţie. a) Avem $\operatorname{tg}\Big(f(x)+f\big(\frac{2-x}{1+2x}\big)\Big) = \frac{x+\frac{2-x}{1+2x}}{1-\frac{x(2-x)}{1+2x}} = 2$ şi $f(x)+f\big(\frac{2-x}{1+2x}\big)\in(0,\pi)$, deci $f(x)+f\big(\frac{2-x}{1+2x}\big)=\operatorname{arctg}2$ **3p**

Facem schimbarea de variabilă $x=\frac{2-t}{1+2t}$ ... **3p**

Obţinem $I=\int_2^0 \frac{(1+2t)^2(\operatorname{arctg}2-f(t))}{(2-t)^2+2(2-t)(1+2t)+2(1+2t)^2}\cdot\frac{-5}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = -I+J$, unde $J=\int_0^2\frac{\operatorname{arctg}2}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t=\operatorname{arctg}2(\operatorname{arctg}3-\frac{\pi}{4})$. Rezultă $I=\frac{\operatorname{arctg}2(4\operatorname{arctg}3-\pi)}{8}$ ... **4p**

3. Arătaţi că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ şi $\det(X^2+I_2)=\widehat{0}$, atunci X^2+I_2 este matricea nulă. Rămâne valabilă proprietatea precedentă dacă înlocuim $\mathbb{Z}_7$ cu $\mathbb{Z}_5$?

Soluţie. Arătăm că $\operatorname{tr}(X)=\widehat{0}$ şi $\det(X)=\widehat{1}$, (*) ... **2p**

Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_7$, atunci $D=\det(X^2+I_2)=(a^2+bc+\widehat{1})(d^2+bc+\widehat{1})-bc(a+d)^2$ ... **2p**

Observăm că $D=(ad-bc-1)^2+(a+d)^2$ ... **2p**

Cum, în $\mathbb{Z}_7$, $x^2+y^2=\widehat{0}$ implică $\widehat{x}=\widehat{y}=\widehat{0}$, rezultă relaţia (*) ... **2p**

În $\mathbb{Z}_5$ nu mai este adevărat: pentru $X=\begin{pmatrix}\widehat{1} & \widehat{1}\\ \widehat{1} & \widehat{0}\end{pmatrix}$ avem $\det(X^2+I_2)=\widehat{0}$, dar $X^2+I_2\neq 0_2$ ... **2p**

4. Fie $(x_n)_{n\geqslant 0}$ şirul dat de relaţiile $x_0\in[0,1]$ şi $x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\int_0^{x_n}\sin(t^2)\mathrm{d}t\Big)$. Arătaţi că $x_n\to 0$.

Soluţie. Avem inductiv $x_n\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}$.

Apoi $x_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}(x_n+\int_0^{x_n}1\mathrm{d}t)=x_n$, deci şirul este convergent către $l\geqslant 0$ ... **4p**

Recurenţa duce la $l=\int_0^l\sin(t^2)\mathrm{d}t$. Cu formula de medie obţinem $l=l\sin(c^2)$, $c\in[0,l]\subset[0,1]$, deci $l=0$ ... **6p**

5. Fie a,b numere reale. Arătaţi că, dacă toate rădăcinile polinomului $f=2X^3+2aX^2+(a^2+4a+11)X+b$ sunt reale, atunci ele aparţin intervalului $[1,3]$.

Soluţie. $\sum x_1=-a$, $\sum x_1x_2=\frac{a^2+4a+11}{2}$ ... **4p**

Obţinem $2\sum x_1x_2=(\sum x_1)^2-4\sum x_1+11$. Rezultă $\sum(x_1-2)^2=1$, de unde concluzia ... **6p**

6. Fie $S=\{f\mid f:[0,1]\to[0,1], f \text{ bijectivă}\}$.

a) Arătaţi că $(S,\circ)$ este grup, unde „$\circ$" este compunerea funcţiilor.

b) Arătaţi că, dacă $f\in S$ are ordin finit, are primitive şi este diferită de elementul neutru, atunci $\operatorname{ord}(f)=2$.

Soluţie. a) Se verifică axiomele grupului ... **3p**

b) Dacă $f\in S$ şi are primitive, atunci este injectivă şi are proprietatea Darboux, deci este strict monotonă ... **3p**

Dacă f este strict crescătoare şi $f\neq 1_{[0,1]}$, atunci există $a\in[0,1]$ astfel încât $f(a)>a$ sau $f(a)<a$. Rezultă $a<f(a)<f(f(a))<\ldots$ sau $a>f(a)>f(f(a))>\ldots$, deci $f^{[n]}(a)\neq a$. Astfel, dacă f are ordin finit, atunci f este strict descrescătoare sau $f=1_{[0,1]}$.

Dacă $f\neq e=1_{[0,1]}$, atunci f este strict descrescătoare, iar $f\circ f$ este strict crescătoare şi are ordin finit, deci, cu raţionamentul anterior, $f\circ f$ este funcţia identică ... **4p**

7. Fie n un număr natural. Arătaţi că ecuaţia $2z^{n+1}+iz^n+iz-2=0$ nu are nicio rădăcină reală şi toate rădăcinile au modul 1.

Soluţie. Dacă avem o rădăcină reală r, atunci $r^{n+1}=1$ şi $r^n+r=0$ – imposibil. ... **3p**

Avem $z^n(2z+i)=2-iz$. Dacă $|z|>1$, atunci $|2z+i|<|2-iz|$, deci $4|z|^2-2iz+2i\overline{z}+1<4-2iz+2i\overline{z}+|z|^2$, de unde $|z|<1$ – fals. Analog, $|z|<1$ este imposibil ... **7p**

8. Fie $I_n=\displaystyle\int_0^1\arccos(x^n)\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton şi determinaţi-i limita.

Soluţie. Pentru $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ avem $x^n\geqslant x^{n+1}$, deci $\arccos x^n\leqslant\arccos x^{n+1}$, de unde $I_n\leqslant I_{n+1}$, ceea ce arată că $(I_n)_n$ este crescător ... **2p**

Avem $I_n=\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x^n\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\int_0^1\arcsin x^n\mathrm{d}x$ şi arătăm că $\int_0^1\arcsin x^n\mathrm{d}x\to 0$ (deci $I_n\to\frac{\pi}{2}$) ... **2p**

Considerăm funcţia continuă $f:[0,1]\to[0,1]$ definită de $f(0)=1$ şi $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}$ pentru $x\in(0,1]$. Atunci $\int_0^1\arcsin x^n\mathrm{d}x=\int_0^1x^nf(x^n)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1xf(x^n)nx^{n-1}\mathrm{d}x$. Putem face schimbarea de variabilă $x^n=t$. Atunci $x=\sqrt[n]{t}$, $nx^{n-1}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ şi integrala devine $\frac{1}{n}\int_0^1\sqrt[n]{t}f(t)\mathrm{d}t$. Cum $0\leqslant\frac{1}{n}\int_0^1\sqrt[n]{t}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\int_0^1f(t)\mathrm{d}t\to 0$, rezultă concluzia anunţată ... **6p**

Observaţie. Dacă $f:[0,1]\to[0,1]$ este o funcţie continuă pe $[0,1]$ şi derivabilă în 0, atunci $\int_0^1f(x^n)\mathrm{d}x=f(0)+\int_0^1\big(f(x^n)-f(0)\big)\mathrm{d}x=f(0)+\int_0^1x^ng(x^n)\mathrm{d}x=f(0)+\frac{1}{n}\int_0^1\sqrt[n]{t}g(t)\mathrm{d}t\to f(0)$, unde $g:[0,1]\to[0,1]$ este funcţia continuă care verifică relaţia $f(t)-f(0)=tg(t), \forall t\in[0,1]$.