CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIŢIA 9-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 18 MAI 2024

Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 12-a

1. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t - x}{x^3}$.

2. Fie funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
a) Arătaţi că suma $f(x) + f\left(\frac{2-x}{1+2x}\right)$ nu depinde de x.
b) Calculaţi $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{f(x)}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$.

3. Arătaţi că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ şi $\det(X^2 + I_2) = \widehat{0}$, atunci $X^2 + I_2$ este matricea nulă. Rămâne valabilă proprietatea precedentă dacă înlocuim $\mathbb{Z}_7$ cu $\mathbb{Z}_5$?

4. Fie $(x_n)_{n\geqslant 0}$ şirul dat de relaţiile $x_0 \in [0,1]$ şi

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \int_0^{x_n} \sin(t^2)\mathrm{d}t\Big).$$

Arătaţi că $x_n \to 0$.

5. Fie a, b numere reale. Arătaţi că, dacă toate rădăcinile polinomului

$$f = 2X^3 + 2aX^2 + (a^2 + 4a + 11)X + b$$

sunt reale, atunci ele aparţin intervalului $[1,3]$.

6. Fie $S = \{f \mid f : [0,1] \to [0,1], f \text{ bijectivă}\}$.
a) Arătaţi că $(S, \circ)$ este grup, unde „$\circ$” este compunerea funcţiilor.
b) Arătaţi că, dacă $f \in S$ are ordin finit, are primitive şi este diferită de elementul neutru, atunci $\operatorname{ord}(f) = 2$.

7. Fie n un număr natural. Arătaţi că ecuaţia

$$2z^{n+1} + iz^n + iz - 2 = 0$$

nu are nicio rădăcină reală şi toate rădăcinile au modul 1.

8. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \arccos(x^n)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton şi determinaţi-i limita.