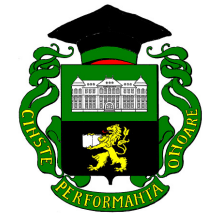


CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA 9-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 18 MAI 2024



Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 12-a

1. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt - x}{x^3}$.

2. Fie funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

a) Arătați că suma $f(x) + f\left(\frac{2-x}{1+2x}\right)$ nu depinde de x .

b) Calculați $I = \int_0^2 \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 2} dx$.

3. Arătați că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ și $\det(X^2 + I_2) = \widehat{0}$, atunci $X^2 + I_2$ este matricea nulă. Rămâne valabilă proprietatea precedentă dacă înlocuim \mathbb{Z}_7 cu \mathbb{Z}_5 ?

4. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ șirul dat de relațiile $x_0 \in [0, 1]$ și

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \int_0^{x_n} \sin(t^2) dt \right).$$

Arătați că $x_n \rightarrow 0$.

5. Fie a, b numere reale. Arătați că, dacă toate rădăcinile polinomului

$$f = 2X^3 + 2aX^2 + (a^2 + 4a + 11)X + b$$

sunt reale, atunci ele aparțin intervalului $[1, 3]$.

6. Fie $S = \{f \mid f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f \text{ bijectivă}\}$.

a) Arătați că (S, \circ) este grup, unde „ \circ ” este compunerea funcțiilor.

b) Arătați că, dacă $f \in S$ are ordin finit, are primitive și este diferită de elementul neutru, atunci $\operatorname{ord}(f) = 2$.

7. Fie n un număr natural. Arătați că ecuația

$$2z^{n+1} + iz^n + iz - 2 = 0$$

nu are nicio rădăcină reală și toate rădăcinile au modul 1.

8. Fie $I_n = \int_0^1 \arccos(x^n) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și determinați-i limita.