Clasa a 9-a

1. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea $f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y$, oricare ar fi numerele naturale x şi y.

Soluţie. Pentru $x = 0$ avem $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{N}$ **2p**

Pentru $x = 1$ şi $y = f(t)$ avem $f(1 + t) = f(1) + f(t), \forall t \in \mathbb{N}$ **4p**

Rezultă inductiv $f(n) = nf(1), \forall n \geqslant 1$ **2p**

Avem $f(1) = 1$ şi $f(0) = 0$, deci $f = 1_{\mathbb{N}}$ **2p**

2. Fie A, B, C trei puncte distincte pe un cerc de centru O, astfel încât există numerele reale nenule x, y cu proprietatea $|x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}| = |x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}| = |x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OA}|$. Arătaţi că $\triangle ABC$ este echilateral.

Soluţie. Ridicând la pătrat şi ţinând cont că $OA = OB = OC$ obţinem $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ ...**6p**

Deducem $\triangle AOB \equiv \triangle BOC \equiv \triangle COA$, de unde concluzia **4p**

3. Grupăm numerele naturale nenule astfel: $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10\}$, ... (grupa numărul i conţine i numere). Aflaţi suma elementelor grupei care îl conţine pe 2024.

Soluţie. Grupa numărul i are cel mai mic element $a_i = 1 + 2 + \ldots + (i - 1) + 1 = \frac{i(i-1)}{2} + 1$ şi cel mai mare $b_i = 1 + 2 + \ldots + i = \frac{i(i+1)}{2}$ **4p**

Din $a_i \leqslant 2024 \leqslant b_i$ rezultă $i = 64$ **3p**

$S = \frac{64(a_{64}+b_{64})}{2} = 32(64^2 + 1) = 131104$ **3p**

4. Fie a un număr real nenul, cu proprietatea că $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$. Demonstraţi că $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 1$, pentru orice număr natural nenul n.

Soluţie. Avem $a + \frac{1}{a} = k$, $k \in \mathbb{Z}$ **2p**

Din $a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = k\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$ pentru $n \geqslant 2$ şi $a^2 + \frac{1}{a^2} = k^2 - 2$ reiese inductiv că $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} \in \{0, 1\}$ **6p**

Dacă $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 0$, atunci $a^n \in \mathbb{Z}$ şi $\frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$, deci $a \in \{-1, 1\}$ – fals. Rămâne $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 1$ **2p**

5. Considerăm un număr real m şi ecuaţia $mx^2 - 2(m - 1)x + m + 3 = 0$.

a) Arătaţi că, dacă $m \neq 0$ şi ecuaţia are rădăcinile x_1, x_2, atunci $2x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = 8$.

b) Determinaţi numerele reale m pentru care toate soluţiile ecuaţiei sunt numere întregi.

Soluţie. a) Dacă $m \neq 0$, atunci $x_1 + x_2 = 2 - \frac{2}{m}$ şi $x_1x_2 = 1 + \frac{3}{m}$, deci $3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 8$ **4p**

b) Dacă $m = 0$, atunci $x = -\frac{3}{2}$ **1p**

Dacă $m \neq 0$, rezultă $(2x_1 + 3)(2x_2 + 3) = 25$. Dintre cazurile posibile nu convine cel în care $x_1 = x_2 = 1$. Obţinem $m = -\frac{1}{4}$, $m = \frac{1}{9}$, $m = \frac{1}{5}$ **5p**

6. Fie AD, BE, CF bisectoarele triunghiului scalen ABC ($D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$). Mediatoarele segmentelor AD, BE, CF taie dreptele BC, CA, AB în A', B', respectiv C'. Arătaţi că punctele A', B', C' sunt coliniare.

Soluţie. Arătăm că $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \quad (*)$ **2p**

Observăm că A' este mijlocul segmentului DG, unde G este piciorul bisectoarei exterioare din A........ **3p**

Din $\overline{GB} = \frac{ac}{b-c}$, $\overline{BD} = \frac{ac}{b+c}$ şi $2\overline{A'B} = \overline{DB} + \overline{GB}$ rezultă $\overline{A'B} = \frac{ac^2}{b^2-c^2}$, de unde $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2}{b^2}$. Folosind şi relaţiile analoage, obţinem (*) **5p**

Altă soluţie – schiţă. Dacă H şi I sunt picioarele celorlalte bisectoare exterioare, atunci A', B', C' sunt mijloacele diagonalelor DG, EH, FI ale patrulaterului complet $DEFGHI$.

7. Aflaţi primele două zecimale ale numărului $a = \sin 10° \sin 50° \sin 70° \sin 80°$.

Soluţie. Avem $a = \sin 10° \sin 50° \sin 70° \sin 80° = \sin 10° \cos 10° \cos 20° \cos 40° = \frac{1}{8} \sin 80°$ **4p**

Reiese $a < \frac{1}{8} = 0{,}125$ **2p**

Apoi $a > \frac{1}{8} \sin 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{32} > 0{,}12$, deci primele două zecimale sunt 12 .... **4p**

8. Fie $n \geqslant 4$ un număr natural. Arătaţi că, dacă scrierile zecimale ale numerelor 2^n şi 5^n încep cu aceleaşi prime două cifre, atunci acestea sunt 31.

Soluţie. Dacă 2^n şi 5^n „încep” cu a, atunci există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \cdot 10^p < 2^n < (a + 1) \cdot 10^p$ şi $a \cdot 10^q < 5^n < (a + 1) \cdot 10^q$ **2p**

Rezultă $a^2 \cdot 10^{p+q} < 10^n < (a + 1)^2 \cdot 10^{p+q}$. Cum $a^2 \geqslant 10^2$ şi $(a + 1)^2 \leqslant 10^4$, reiese $n = p + q + 3$. Obţinem $a^2 < 1000 < (a + 1)^2$, de unde $a = 31$ **8p**

Observaţie. Există n pentru care se întâmplă acest lucru, iar cel mai mic este 98.