

CONCURSUL „MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA 9-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 18 MAI 2024



Colegiul Național Gheorghe Șincai

Clasa a 9-a

1. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

oricare ar fi numerele naturale x și y .

2. Fie A, B, C trei puncte distincte pe un cerc de centru O , astfel încât există numerele reale nenule x, y cu proprietatea

$$|x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}| = |x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}| = |x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OA}|.$$

Arătați că $\triangle ABC$ este echilateral.

3. Grupăm numerele naturale nenule astfel: $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \dots$ (grupa numărul i conține i numere). Aflați suma elementelor grupei care îl conține pe 2024.

4. Fie a un număr real nenul, cu proprietatea că $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$. Demonstrați că $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$, pentru orice număr natural nenul n .

5. Considerăm un număr real m și ecuația $mx^2 - 2(m-1)x + m + 3 = 0$.

a) Arătați că, dacă $m \neq 0$ și ecuația are rădăcinile x_1, x_2 , atunci $2x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = 8$.

b) Determinați numerele reale m pentru care toate soluțiile ecuației sunt numere întregi.

6. Fie AD, BE, CF bisectoarele triunghiului scalen ABC ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Mediatoarele segmentelor AD, BE, CF taie dreptele BC, CA, AB în A', B' , respectiv C' . Arătați că punctele A', B', C' sunt coliniare.

7. Aflați primele două zecimale ale numărului

$$a = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ.$$

8. Fie $n \geq 4$ un număr natural. Arătați că, dacă scrierile zecimale ale numerelor 2^n și 5^n încep cu aceleași prime două cifre, atunci acestea sunt 31.