Clasa a 11-a

1. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea $f(x) = f(\sin x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dat prin $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \sin x_n$. Atunci $f(x_{n+1}) = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ **2p**

Şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton şi mărginit, deci are o limită $l \in \mathbb{R}$ **4p**

Ecuaţia $\sin x = x$ are soluţia unică 0, deci $l = 0$..... **2p**

$f(x_0) = f(l) = f(0) =$ const, iar x_0 este arbitrar **2p**

2. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir dat de $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{a_n}$, oricare ar fi $n \geqslant 1$. Arătaţi că $a_n \to 1$.

Soluţie. $a_{n+2} = \frac{n+a_n+n^2a_n+na_n}{(n+1)(n+a_n)}$ **2p**

Avem $|a_{n+2} - 1| = |a_n - 1|\frac{n^2}{(n+1)(n+a_n)} < \frac{n}{n+1}|a_n - 1|$. Rezultă $|a_{2n+1} - 1| < |a_1 - 1| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \to 0$ şi $|a_{2n} - 1| < |a_2 - 1| \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \to 0$ **8p**

3. a) Daţi exemplu de o matrice nenulă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care există $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB - BA = A$.

b) Arătaţi că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $AB - BA = A$, atunci A este neinversabilă.

Soluţie. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$............ **4p**

b) Dacă există A^{-1}, atunci $ABA^{-1} - A^{-1}BA = 2I_n$ **3p**

Rezultă $\mathrm{tr}(2I_n) = 0$ – fals **3p**

4. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi are cu proprietatea: pentru orice $a < b \in \mathbb{R}$ există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(b) - f'(a) = 6c(b - a)$. Arătaţi că f este de două ori derivabilă şi determinaţi f.

Soluţie. Fie x_0 fixat. Pentru $x \neq x_0$, $\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = 6c_x$ şi c_x între x şi x_0 implică $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = 6x_0$, deci $f''(x_0)$ există şi este $6x_0$, cu x_0 arbitrar **6p**

$f'(x) = 3x^2 + a$, $f(x) = x^3 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ **4p**

5. Aflaţi distanţa dintre graficele funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

Distanţa dintre mulţimile de puncte A şi B este $\inf\{PQ \mid P \in A, Q \in B\}$.

Soluţie. Pentru $x_0 \in \mathbb{R}$ fixat, $A(x_0, e^{x_0})$ şi $B(y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, avem $AB^2 = 2y^2 - 2y(x_0 + e^{x_0}) + x_0^2 + e^{2x_0}$, iar $\min_{y\in\mathbb{R}} AB^2 = \frac{-\Delta}{8} = \frac{1}{2}(e^{x_0} - x_0)^2$ **5p**

Cum $\min_{x\in\mathbb{R}}(e^x - x) = 1$, distanţa cerută este $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .. **5p**

6. Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A^t = A^{-1}$ şi $\mathrm{tr}(A) = 3$, atunci $A = I_3$.

Soluţie. Fie $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. Atunci $\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}^2 = 1$, $\forall i$ şi $\sum_{i=1}^{3} a_{i,i} = 3$ **5p**

Rezultă $a_{i,i} = 1$, $\forall i$ şi $a_{i,j} = 0$, $\forall i \neq j$, deci $A = I_3$ .. **5p**

7. a) Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\det(A^2 + I_2) = 0$, atunci $A^2 + I_2 = 0_2$.

b) Arătaţi că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $X^3 - 4X^2 + 5X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, atunci $X^2 = 4X$.

Soluţie. a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $0 = \det(A + iI_2) \cdot \det(A - iI_2)$ duce la $ad - bc = 1$ şi $a + d = 0$, de unde $A^2 = -I_2$ **3p**

b) Avem $\det X \det((X - 2I_2)^2 + I_2) = 0$. Dacă $\det((X - 2I_2)^2 + I_2) = 0$, atunci $X^2 - 4X + 5I_2 = 0_2$ – fals **2p**

Rezultă $\det X = 0$, de unde $X^2 = tX$, $X^3 = t^2X$, iar relaţia devine $(t^2 - 4t + 5)X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. Luând urmele matricelor, obţinem $t(t^2 - 4t + 5) = 20$, deci $t = 4$ şi $X^2 = 4X$ **5p**

8. Fie $n \geqslant 3$ un număr natural şi $a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$, $b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots$, $c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$. Arătaţi că $\begin{vmatrix} a_n & b_n & c_n \\ c_n & a_n & b_n \\ b_n & c_n & a_n \end{vmatrix} = 2^n$.

Soluţie. Determinantul este egal cu $(a_n + b_n + c_n)(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - a_nc_n - b_nc_n)$........................ **3p**

Dacă $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, atunci $(1 + \varepsilon)^n = a_n + \varepsilon b_n + \varepsilon^2 c_n$, $(1 + \varepsilon^2)^n = a_n + \varepsilon^2 b_n + \varepsilon c_n$, $a_n + b_n + c_n = 2^n$ .. **4p**

Deoarece $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$, rezultă $(a_n + \varepsilon b_n + \varepsilon^2 c_n)(a_n + \varepsilon^2 b_n + \varepsilon c_n) = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - c_na_n - b_nc_n$, ceea ce duce la $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - c_na_n - b_nc_n = (1 + \varepsilon)^n(1 + \varepsilon^2)^n = 1$ **3p**