CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”

EDIȚIA A XI-A

ETAPA MUNICIPALĂ - 9 MAI 2026

Clasa a IX-a Barem

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Determinați $x \in [0, 2\pi)$ pentru care $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 3x}{b} = \frac{\sin 5x}{c}$.

Rezolvare. Fie $t = \frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 3x}{b} = \frac{\sin 5x}{c}$ (1)

Dacă $t = 0$, atunci $\sin x = \sin 3x = \sin 5x = 0$, de unde $x \in \{0, \pi\}$. .... (**4p**)

Dacă $t \neq 0$, atunci $\sin x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$, $\sin 5x \neq 0$. Din relația (1) obținem $t = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{a+b+c} = \frac{2\sin 3x \cos 2x + \sin 3x}{3b} = \frac{\sin 3x(2\cos 2x + 1)}{3b}$, de unde $\frac{\sin 3x}{b} = \frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{3b}$, deci $3 = 2\cos 2x + 1$, adică $\cos 2x = 1$ și atunci $x \in \{0, \pi\}$, soluții neconvenabile acestui caz. (**5p**)

Rămân soluțiile obținute în primul caz, adică $x \in \{0, \pi\}$. .... (**1p**)

2. Determinați perechile (x, y) de numere reale pentru care $\begin{cases} 6x^2 - 9xy + 2y = 0 \\ 3y^2 - 18xy + 8x = 0 \end{cases}$.

Rezolvare. Putem rescrie $\begin{cases} 12x^2 - 18xy + 4y = 0 \\ -3y^2 + 18xy - 8x = 0 \end{cases}$. Obținem $12x^2 - 8x - 3y^2 + 4y = 0 \iff 36x^2 - 24x - 9y^2 + 12y = 0 \iff 36x^2 - 24x + 4 - 9y^2 + 12y - 4 = 0 \iff (6x-2)^2 - (3y-2)^2 = 0 \iff (6x - 2 - 3y + 2)(6x - 2 + 3y - 2) = 0 \iff 3(2x - y)(6x + 3y - 4) = 0$. ...... (**5p**)

Dacă $y = 2x$, atunci $6x^2 - 18x^2 + 4x = 0 \iff 4x(3x - 1) = 0$, de unde $(x; y) \in \{(0; 0), (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})\}$. .... (**3p**)

Dacă $y = \frac{4}{3} - 2x$, atunci $6x^2 - 9x(\frac{4}{3} - 2x) + 2(\frac{4}{3} - 2x) = 0 \iff 6x^2 - 12x + 18x^2 + \frac{8}{3} - 4x = 0 \iff 24x^2 - 16x + \frac{8}{3} = 0 \iff 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0 \iff x = \frac{1}{3}$. Rămân soluțiile găsite la cazul anterior. .... (**2p**)

3. a) Arătați că $[\sqrt{2026}] + [-\sqrt{2026}] = -1$.

b) Rezolvați ecuația $[x - 2025]^{1892} + [2026 - x]^{1892} = 2$ în mulțimea numerelor reale.

Rezolvare. a) Avem $[\sqrt{2026}] = 45, [-\sqrt{2026}] = -46 \Rightarrow [\sqrt{2026}] + [-\sqrt{2026}] = -1$ .. (**2p**)

b) Notăm $x - 2025 = t \Rightarrow [t]^{1892} + [1 - t]^{1892} = 2 \iff [t]^{1892} + (1 + [-t])^{1892} = 2$. . (**2p**)

Dacă $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, atunci $[t] + [-t] = -1 \iff 1 + [-t] = -[t]$, atunci ecuația devine $2[t]^{1892} = 2 \iff [t]^{1892} = 1 \iff [t] = \pm 1$.

Pentru $[t] = 1 \Rightarrow t \in (1, 2)$ (deoarece $x \notin \mathbb{Z}$) $\Rightarrow x \in (2026, 2027)$, iar pentru $[t] = -1 \Rightarrow t \in (-1, 0)$ (deoarece $x \notin \mathbb{Z}$) $\Rightarrow x \in (2024, 2025)$. .... (**2p**)

Dacă $t \in \mathbb{Z}$, atunci ecuația se rescrie $t^{1892} + (1 - t)^{1892} = 2$. Cum t^{1892} și $(1 - t)^{1892}$ sunt numere naturale și suma lor este 2, vom deosebi situațiile

$t^{1892} = 0$, $(1 - t)^{1892} = 2$, imposibil.

$t^{1892} = 2$, $(1 - t)^{1892} = 0$, imposibil.

$t^{1892} = 1$, $(1 - t)^{1892} = 1$, imposibil. .... (**3p**)

Mulțimea soluțiilor ecuației este $x \in (2024, 2025) \cup (2026, 2027)$. .... (**1p**)

4. Fie un triunghi ABC și punctele $M \in (AB), N \in (AC)$. Demonstrați că dreapta MN trece prin mijlocul medianei din A în triunghiul ABC dacă și numai dacă

$$\frac{AM}{BM} + \frac{AN}{CN} = 2 \cdot \frac{AM}{BM} \cdot \frac{AN}{CN}.$$

Rezolvare Fie D mijlocul laturii BC și R mijlocul medianei AD. Notăm $\frac{AM}{BM} = x$ și $\frac{AN}{CN} = y$. Atunci $\frac{AM}{AB} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{AB}$ și $\frac{AN}{AC} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{y}{y+1}\overrightarrow{AC}$. .... **(5p)**

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{x}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{y+1}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AR} = -\frac{x}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1-3x}{4(1+x)}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. .... **(3p)**

M, R și N sunt coliniare $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MR}$ sunt coliniari $\Longleftrightarrow$ $\frac{3x-1}{x} = \frac{y+1}{y}$ $\Longleftrightarrow$ $x + y = 2xy$ .... **(2p)**

5. Se consideră $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ fixat și ecuațiile: $x^2 - 2(\cos t + 2\sin t)x + 4 = 0$, $x^2 - 2(\sin t + 2\cos t)x + 4 = 0$. Demonstrați că cel puțin una dintre ecuații are rădăcini reale.

Rezolvare. Presupunem prin reducere la absurd că cele două ecuații nu au soluții reale. Atunci $\Delta_1 = 4(\cos t + 2\sin t)^2 - 16 < 0$ și $\Delta_2 = 4(\sin t + 2\cos t)^2 - 16 < 0$. .... **(5p)**

Adică $\begin{cases} \cos t + 2\sin t - 2 < 0 \\ \sin t + 2\cos t - 2 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos t < 2(1 - \sin t) \\ \sin t < 2(1 - \cos t) \end{cases}$ de unde, pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{cases} \cos t(1 + \sin t) < 2\cos^2 t \\ \sin t(1 + \cos t) < 2\sin^2 t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin t < 2\cos t \\ 1 + \cos t < 2\sin t \end{cases}$$

Adunând ultimele relații, găsim $\sin t + \cos t > 2$, contradicție. Deci, cel puțin una dintre ecuații are rădăcini reale. .... **(5p)**

6. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = [(3 + 2\sqrt{2})^n], n \geq 1$.

a) Calculați x_2.

b) Demonstrați că numărul $a_n = \frac{(x_n-1)(x_n+3)}{8}$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. a) $x_2 = [(3 + 2\sqrt{2})^2] = [17 + 12\sqrt{2}] = 33$. .... **(3p)**

b) Folosind inducția matematică, se arată că există $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(3 + 2\sqrt{2})^n = p_n + q_n\sqrt{2}$ și $(3 - 2\sqrt{2})^n = p_n - q_n\sqrt{2}$. .... **(3p)**

Înmulțind găsim $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$, de unde $(3+2\sqrt{2})^n = p_n + \sqrt{p_n^2 - 1}$. De aici, $x_n = 2p_n - 1$. Cu acestea, $a_n = \frac{(x_n-1)(x_n+3)}{8} = \frac{(2p_n-2)(2p_n+2)}{8} = \frac{4(p_n^2-1)}{8} = \frac{2q_n^2}{2} = q_n^2$. .... **(4p)**

7. Fie $a, b, c > 0$. Arătați că

$$\left(\frac{b+c-2a}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{c+a-2b}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{a+b-2c}{\sqrt{c}}\right)^2 \geq \frac{12(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a+b+c}.$$

Rezolvare. Fie $x = b + c - 2a, y = c + a - 2b, z = a + b - 2c$. Evident $x + y + z = 0$ **(5p)**

Rămâne de arătat $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{a+b+c} \Longleftrightarrow \frac{x^2(a+b+c)}{a} + \frac{y^2(a+b+c)}{b} + \frac{z^2(a+b+c)}{c} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) \Longleftrightarrow x^2\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + y^2\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + z^2\left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) \Longleftrightarrow x^2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + y^2\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + z^2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \geq x^2 + y^2 + z^2 \Longleftrightarrow$

$\left(x\sqrt{\frac{b}{a}} + y\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - 2xy + \left(y\sqrt{\frac{c}{b}} + z\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 - 2yz + \left(z\sqrt{\frac{a}{c}} + x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - 2zx \geq x^2 + y^2 + z^2 \Longleftrightarrow$
$\left(x\sqrt{\frac{b}{a}} + y\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + \left(y\sqrt{\frac{c}{b}} + z\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 + \left(z\sqrt{\frac{a}{c}} + x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 \geq (x+y+z)^2 \Longleftrightarrow \left(x\sqrt{\frac{b}{a}} + y\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + \left(y\sqrt{\frac{c}{b}} + z\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 + \left(z\sqrt{\frac{a}{c}} + x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 \geq 0$, inegalitate evidentă. .... **(5p)**

8. Considerăm triunghiul ABC cu $AB = 4, BC = 5, CA = 6$ și punctele M și N astfel încât $7\overrightarrow{AM} = 12\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = \ell\overrightarrow{AC}$. Fie D intersecția bisectoarei interioare a unghiului BAC cu cercul circumscris. Determinați ℓ astfel încât punctele M, D, N să fie coliniare.

Rezolvare. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și I_a centrul cercului exînscris tangent laturii BC. Arătăm că D este mijlocul segmentului $[II_a]$. În triunghiul IBD avem $m(\widehat{IBD}) = \frac{\pi-C}{2}$, $m(\widehat{IDB}) = C$, $m(\widehat{BID}) = \frac{\pi-C}{2}$, deci $BD = DI$. În triunghiul BDI_a avem $m(\widehat{BDI_a}) = \pi - C$, $m(\widehat{DBI_a}) = \frac{C}{2}$, $m(\widehat{BI_aD}) = \frac{C}{2}$, deci $BD = DI_a$, adică $ID = DI_a$ . . (**4p**)

Atunci $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI_a}\right)$. Avem $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)$ . . . . (**2p**)

Fie $BI_a \cap AC = \{T\} \Rightarrow \frac{TA}{TC} = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} \Rightarrow \overrightarrow{TA} = \frac{c}{a}\overrightarrow{TC} \Rightarrow \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} = \frac{c}{a}\overrightarrow{TB} + \frac{c}{a}\overrightarrow{BC} \Rightarrow (a-c)\,\overrightarrow{TB} = c\overrightarrow{BC} - a\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BT} = \frac{1}{c-a}\left(c\overrightarrow{BC} - a\overrightarrow{BA}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BI_a} = \frac{k}{c-a}\left(c\overrightarrow{BC} - a\overrightarrow{BA}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BI_a} = \frac{k}{c-a}\left(c(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - a\overrightarrow{BA}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BI_a} = -k\overrightarrow{AB} + \frac{kc}{c-a}\overrightarrow{AC}$. (1)

$\overrightarrow{BI_a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI_a} \Rightarrow \overrightarrow{BI_a} = \overrightarrow{BA} + q\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{BI_a} = -\overrightarrow{AB} + \frac{q}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow$

$\overrightarrow{BI_a} = \left(\frac{qb}{a+b+c} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{qc}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$. (2)

Din (1) și (2) avem $\begin{cases} -k = \frac{qb}{a+b+c} - 1 \\ \frac{kc}{c-a} = \frac{qc}{a+b+c} \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{a+b+c-qb}{a+b+c} \\ a+b+c-qb = qc - qa \end{cases} \iff \begin{cases} q = \frac{a+b+c}{b+c-a} \\ k = \frac{c-a}{b+c-a} \end{cases}$

$\overrightarrow{BI_a} = \frac{a-c}{b+c-a}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI_a} = \frac{a-c}{b+c-a}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AI_a} = \frac{b}{b+c-a}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC}$ . . . . (**2p**)

Atunci $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) + \frac{b}{b+c-a}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c-a}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{b+c}{(b+c)^2-a^2}(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})$, de unde $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{15}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

M, D și N sunt coliniare $\iff \overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{MD} \iff \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = t\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{AD} \iff (t-1)\,\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AN} \iff \frac{12(t-1)}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{4t}{15}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) - \ell\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} \frac{12(t-1)}{7} = \frac{12t}{15} \\ \frac{8t}{15} = \ell \end{cases}$, de unde $\ell = 1$ . . . . (**2p**)