CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIŢIA A XI-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 9 MAI 2026

Clasa a X-a Barem

1. Dacă $z \in \mathbb{C}$ și $|z| = 1$, demonstrați că:

$$\sqrt{3} \leq |1 + z| + |1 - z + z^2| \leq \frac{13}{4}$$

Rezolvare. Fie $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Atunci $|1 + z| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$. Pentru al doilea termen, observăm: $|1-z+z^2| = |z(z-1+\frac{1}{z})| = |z|\cdot|2\cos\theta-1| = |2\cos\theta-1|$. Notând $t = |\cos\frac{\theta}{2}| \in [0, 1]$, avem $\cos\theta = 2t^2 - 1$. Expresia devine $E(t) = 2t + |4t^2 - 3|$. **5p**

Dacă $t \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $E(t) = 2t + 3 - 4t^2$. Maximul este $\frac{13}{4}$ (la $t = 1/4$), iar minimul este $\sqrt{3}$ (la capătul din dreapta). **3p**

Dacă $t \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, $E(t) = 4t^2 + 2t - 3$. Minimul este $\sqrt{3}$, iar maximul este 3. .... **2p**

2. Arătați că $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$.

Rezolvare. Aplicăm inegalitatea mediilor ($MA > MG$):

$$\frac{\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6}{4} > \sqrt[4]{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6} \qquad \ldots\ldots \mathbf{4p}$$

Produsul sub radical este $\frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 5}{\ln 4} \cdot \frac{\ln 6}{\ln 5} = \log_2 6$, deci $S > 4\sqrt[4]{\log_2 6}$. **3p**

Deoarece $2^{2.5} = 4\sqrt{2} < 6 \Rightarrow \log_2 6 > 2.5$ și $4\sqrt[4]{2.5} > 5$, rezultă inegalitatea. **3p**

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât

$$a_1\binom{n}{1} + a_2\binom{n}{2} + \cdots + a_n\binom{n}{n} = 2^{n-1}a_n, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

Rezolvare. Vom demonstra prin inducție matematică faptul că termenul general al șirului este de forma $a_n = n \cdot a_1$, pentru orice $n \geq 1$. Dacă demonstrăm acest lucru, va rezulta că șirul este o progresie aritmetică cu rația $r = a_1$. **2p**

Pentru $n = 1$, relația devine $a_1\binom{1}{1} = 2^0 a_1$, deci $a_1 = a_1$ (relație adevărată, deci a_1 poate fi orice număr real).

Pentru $n = 2$, relația din ipoteză este $a_1\binom{2}{1} + a_2\binom{2}{2} = 2^1 a_2$, de unde $2a_1 + a_2 = 2a_2$, deci $a_2 = 2a_1$. Presupunem că $n \geqslant 3$ și că afirmația este adevărată pentru toate numerele naturale $k < n$, adică $a_k = k \cdot a_1$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Scriem relația din ipoteză separând ultimul termen (pentru care $k = n$): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k\binom{n}{k} + a_n\binom{n}{n} = 2^{n-1}a_n$.

Folosind ipoteza de inducție, substituim $a_k = k \cdot a_1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot a_1\binom{n}{k} + a_n = 2^{n-1}a_n$ **2p**

Pentru a calcula suma $\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k}$, ne folosim de identitatea combinatorică $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-1}{j}$$

(Am folosit schimbarea de variabilă $j = k - 1$).

Știm că

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = 2^{n-1}$$

Termenul care ne lipsește din suma noastră pentru a ajunge la 2^{n-1} este cel pentru $j = n-1$, adică $\binom{n-1}{n-1} = 1$. Prin urmare:

$$\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} = 2^{n-1} - 1$$

Înlocuind înapoi în calculul sumei obținem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot a_1 \binom{n}{k} = a_1 \cdot n(2^{n-1} - 1)$$

Acum introducem acest rezultat în ecuația inițială:

$$a_1 \cdot n(2^{n-1} - 1) + a_n = 2^{n-1} a_n$$

$$a_1 \cdot n(2^{n-1} - 1) = a_n(2^{n-1} - 1)$$

Deoarece demonstrăm pentru $n \geq 3$, știm că expresia $2^{n-1} - 1$ este strict pozitivă, deci putem împărți ambele părți ale egalității prin ea: $a_n = n \cdot a_1$ **6p**

4. a) Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $f(z) = \frac{1+zi}{1-zi}$.

(1) Demonstrați că $|f(z)| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$.

(2) Arătați că funcția este bijectivă și determinați f^{-1}.

b) Determinați $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dacă $f(z) + f(\epsilon z) = -z, \forall z \in \mathbb{C}$, unde $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$.

Rezolvare. a) $|f(z)| = 1 \iff \left|\frac{1+zi}{1-zi}\right| = 1 \iff |1 + zi| = |1 - zi|$. Ridicând la pătrat, obținem:

$$|1 + zi|^2 = |1 - zi|^2 \iff (1 + zi)\overline{(1 + zi)} = (1 - zi)\overline{(1 - zi)},$$

adică $(1 + zi)(1 - \bar{z}i) = (1 - zi)(1 + \bar{z}i)$, $1 - \bar{z}i + zi + z\bar{z} = 1 + \bar{z}i - zi + z\bar{z}$, $2zi = 2\bar{z}i$, $z = \bar{z}$, condiție echivalentă cu $z \in \mathbb{R}$. **2p**

Pentru a demonstra bijectivitatea, arătăm că pentru orice $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, există un unic $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ astfel încât $f(z) = w$.

$$w = \frac{1 + zi}{1 - zi} \iff w - wzi = 1 + zi \iff w - 1 = zi(1 + w)$$

Deoarece $w \neq -1$, obținem soluția unică $z = \dfrac{w - 1}{i(w + 1)} \neq -i$, deci funcția este bijectivă. Funcția inversă este $f^{-1}(z) = \dfrac{z - 1}{i(z + 1)}$.. **3p**

b) Știm că $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$, ceea ce implică $\epsilon^3 = 1$ și $\epsilon \neq 1$. Scriem relația dată pentru z, ϵz și $\epsilon^2 z$:

(1) $f(z) + f(\epsilon z) = -z$

(2) $f(\epsilon z) + f(\epsilon^2 z) = -\epsilon z$

(3) $f(\epsilon^2 z) + f(\epsilon^3 z) = -\epsilon^2 z \implies f(\epsilon^2 z) + f(z) = -\epsilon^2 z$

Adunând relațiile (1) și (3) și scăzând relația (2), obținem:

$$[f(z) + f(\epsilon z)] + [f(\epsilon^2 z) + f(z)] - [f(\epsilon z) + f(\epsilon^2 z)] = -z - \epsilon^2 z - (-\epsilon z)$$

$$2f(z) = -z(1 + \epsilon^2 - \epsilon)$$

Folosind faptul că $1 + \epsilon^2 = -\epsilon$: $2f(z) = -z(-\epsilon - \epsilon) = -z(-2\epsilon) = 2\epsilon z$. Astfel, funcția căutată este $f(z) = \epsilon z$. **5p**

5. Aflați numărul valorilor $n \in \mathbb{N}^*$ care verifică

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}} < 1 + \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}.$$

Rezolvare. Termenul general este $\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}$, iar suma este $\sqrt[3]{n+1} - 1$ **5p**

Inegalitatea devine $\sqrt[3]{n+1} < 2 + \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3} = 1 + \sqrt{3}$. **2p**

Deoarece $20 < (1+\sqrt{3})^3 < 21$, reiese $n \le 19$. Sunt 19 valori. **3p**

6. Rezolvați ecuația $16^x + 81^x + (2^x + 3^x)^4 = 3 \cdot 6^{2x+1}$.

Rezolvare. Notăm $2^x = a$, $3^x = b$. Ecuația devine $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 18a^2b^2$. După dezvoltare obținem $a^4 + 2a^3b - 6a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 = 0$. **3p**

Împărțind la a^2b^2 și notând $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, avem $t^2 + 2t - 8 = 0$. **4p**

Singura soluție pozitivă este $t = 2 \Rightarrow a = b \Rightarrow x = 0$. **3p**

7. Rezolvați sistemul $\begin{cases} \log_n(x+2007) = \log_{n+1}(y+2008) \\ \log_{n+1}(x+2008) = \log_n(y+2007) \end{cases}$, unde $n > 1$.

Rezolvare. Notăm $\log_n(x+2007) = \log_{n+1}(y+2008) = u$, $\log_{n+1}(x+2008) = \log_n(y+2007) = v$. Sistemul implică $n^u = (n+1)^v - 1$ și $n^v = (n+1)^u - 1$. **4p**

Obținem $n^u + (n+1)^u = n^v + (n+1)^v$. Cum $n > 1$, funcția $x \mapsto n^x + (n+1)^x$ este strict crescătoare, deci $u = v$. **3p**

Ecuația $n^u + 1 = (n+1)^u$ (cu necunoscuta u) se scrie $(\frac{1}{n})^u + 1 = (1 + \frac{1}{n})^u$, deci din motive de monotonie are soluția unică $u = 1$. Obținem $x = y = n - 2007$. **3p**

8. Fie $n \ge 3$ un număr natural impar. Se consideră un poligon convex $P = A_1A_2\ldots A_n$ și un punct S situat în interiorul acestuia. Notăm cu $n_P(S)$ numărul de triunghiuri distincte, cu vârfurile în $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, care îl conțin pe S în interior. Determinați valoarea maximă a lui $n_P(S)$ pe măsură ce P variază în mulțimea poligoanelor convexe cu n laturi, iar S variază în interiorul lui P.

În contextul securității, acest număr reprezintă redundanța acoperirii punctului S.

Soluție. Pentru ca $n_P(S)$ să fie maxim, punctul S nu trebuie să se afle pe nicio diagonală a poligonului. Dacă S s-ar afla pe o diagonală, o mică deplasare a punctului într-o zonă adiacentă ar crește numărul de triunghiuri care îl conțin, contrazicând astfel maximalitatea. Prin urmare, punctele S, A_i, A_j sunt necoliniare pentru orice $1 \le i < j \le n$. **2p**

Calculăm numărul total de triunghiuri posibile și scădem pe cele care nu îl conțin pe S. Pentru fiecare vârf A_i trasăm dreapta SA_i, care separă restul vârfurilor în două grupuri. Considerăm drept pozitivă orientarea dată de sensul trigonometric și notăm cu T_i mulțimea vârfurilor A_j aflate de o parte a dreptei astfel încât unghiul A_jA_iS să fie pozitiv. Fie $a_i = |T_i|$ numărul de astfel de vârfuri. Orice alegere a două puncte din grupul T_i, împreună cu A_i, va forma un triunghi $A_iA_jA_k$ care nu conține punctul S în interior. Numărul acestor triunghiuri pentru un vârf A_i fixat este $C_{a_i}^2$. Suma tuturor acestor configurații care „ratează" punctul S este $\sum_{i=1}^{n} C_{a_i}^2$, iar fiecare triunghi care nu conține punctul S este numărat exact o singură dată în această sumă. **3p**

Se observă că suma valorilor a_i reprezintă numărul total de perechi, adică $\sum_{i=1}^{n} a_i = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Conform inegalității mediilor (sau utilizând proprietatea de convexitate a funcției combinări), suma $\sum_{i=1}^{n} C_{a_i}^2$ este minimă atunci când valorile a_i sunt cât mai apropiate între ele. Deoarece n este impar, putem atinge simetria perfectă luând:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{n-1}{2}$$

Această valoare se obține, de exemplu, când P este un poligon regulat, iar S este centrul său. Numărul maxim de triunghiuri este

$$n_P(S) = C_n^3 - n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n \cdot \frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{24}.$$

Valoarea maximă a numărului de triunghiuri este $\frac{n(n-1)(n+1)}{24}$. **5p**