CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIȚIA A XI-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 9 MAI 2026

Clasa a XI-a Barem

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\operatorname{tr} A = 1$. Arătați că $\det(A^2 + A + I_2) \geq 3$.

Soluție. Fie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Avem $\det(A^2 + A + I_2) = \det[(A - \varepsilon I_2)(A - \bar{\varepsilon} I_2)] = \det(A - \varepsilon I_2) \cdot \det(A - \bar{\varepsilon} I_2)$ **5p**

Fie $P = x^2 - x + d$, cu $d = \det A$. Atunci $\det(A^2 + A + I_2) = |P(\varepsilon)|^2 = |\varepsilon^2 - \varepsilon + d|^2 = d^2 + 3 \geq 3$. **5p**

2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $AB + \epsilon A + \epsilon^2 B = O_n$, unde $\epsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Arătați că $AB = BA$.

Soluție. Avem $\varepsilon^3 = 1$ și $AB + \varepsilon A + \varepsilon^2 B = O_n \iff AB + \varepsilon A + \varepsilon^2 B + \varepsilon^3 I_n = I_n \iff (A + \varepsilon^2 I_n)(B + \varepsilon I_n) = I_n$. **4p**

Rezultă că $B + \varepsilon I_n = (A + \varepsilon^2 I_n)^{-1}$ **3p**

Atunci $(B + \varepsilon I_n)(A + \varepsilon^2 I_n) = I_n \implies BA + \varepsilon A + \varepsilon^2 B + I_n = I_n = AB + \varepsilon A + \varepsilon^2 B + I_n \implies BA = AB$. **3p**

3. Fie $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$ și funcția $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, f(A) = A^*$ (unde A^* este adjuncta matricei A). Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care funcția este bijectivă și apoi aflați f^{-1}.

Soluție. Avem relațiile: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$; $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}, \alpha \in \mathbb{R}$ $A^* = (\det A) \cdot A^{-1}$ și $\det A^* = (\det A)^{n-1}$. **2p**

Pentru ca funcția f să fie bijectivă trebuie ca pentru orice $B \in \mathcal{M}$ ecuația în A $f(A) = B$ să aibă soluție unică. $f(A) = A^* = B \implies (\det A) \cdot A^{-1} = B \implies \det[(\det A) A^{-1}] = \det B \implies (\det A)^{n-1} = \det B$. Reiese că, pentru ca funcția să fie surjectivă trebuie ca n să fie număr par. **3p**

În acest caz, $\det A = (\det B)^{\frac{1}{n-1}}$ și obținem $A = (\det B)^{\frac{1}{n-1}} B^{-1}$. **3p**

Astfel $f^{-1} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, f^{-1}(B) = (\det B)^{\frac{1}{n-1}} \cdot B^{-1}$. **2p**

4. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = n^2 - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 + k}$. Calculați $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$.

Soluție. $a_n = \sum_{k=1}^{n} (n - \sqrt{n^2 + k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-k}{n + \sqrt{n^2 + k}}$ **4p**

Dar $\frac{-k}{n + \sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{-k}{n + \sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{-k}{n + \sqrt{n^2 + n}}$, $\forall k = \overline{1, n}$. Prin sumare obținem

$$-\frac{n(n+1)}{2(n + \sqrt{n^2 + 1})} \leq a_n \leq -\frac{n(n+1)}{2(n + \sqrt{n^2 + n})} \Rightarrow -\frac{n+1}{2(n + \sqrt{n^2 + 1})} \leq \frac{a_n}{n} \leq -\frac{n+1}{2(n + \sqrt{n^2 + n})}$$

de unde aplicând teorema cleștelui obținem $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = -\frac{1}{4}$ **6p**

5. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 \in (0, \infty)$ și $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

a) Arătați că $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$.

b) Calculați $\lim_{n \to \infty} n x_n$.

Soluție. a) Funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln(1+x)$ este strict crescătoare ($f'(x)=\frac{x}{x+1}>0, \forall x\in(0,\infty)$) Deci $f(x)>f(0)=0, \forall x\in(0,\infty)$. Rezultă $f(x_n)=x_n-\ln(1+x_n)>0 \implies x_n>x_{n+1}$. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător și mărginit ($0<x_n\leq x_0$), deci convergent. **3p**

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$. Avem $l-\ln(1+l)=0$, de unde $l=0$ (ecuația $f(x)=0$ are soluția unică $x=0$) **2p**

b) Șirul $(\frac{1}{x_n})_{n\geq 0}$ este strict crescător și $\frac{1}{x_n}\to\infty$. Aplicând teorema lui Stolz-Cesàro avem: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x-\ln(1+x)}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x-\ln(1+x)}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1-\frac{1}{x+1}}=2.$
5p

6. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+2)|x-a|+x^2|x-b|$. Determinați $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ astfel încât funcția să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Avem $f(x)-x^2|x-b|=(3x+2)|x-a|$ (1)

i) Dacă $b=0$ atunci funcția $x\mapsto x^2|x|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci și funcția $x\mapsto(3x+2)|x-a|$ trebuie să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ și rezultă $a=-\frac{2}{3}$. **3p**

ii) Dacă $a\neq b\neq 0$ atunci funcția are derivate laterale diferite în punctul b, ceea ce nu convine **3p**

Pentru $a=b\neq 0$ avem $f(x)=(x^2+3x+2)|x-a|$ care este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a\in\{-1,-2\}$. Obținem $(a,b)\in\{(-\frac{2}{3},0),(-1,-1),(-2,-2)\}$. **4p**

7. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

a) f injectivă;

b) g surjectivă;

c) $|f(x)-f(y)|\leq|g(x)-g(y)|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Arătați că funcția f este continuă dacă și numai dacă funcția g este continuă.

Soluție. „$\Longleftarrow$" Dacă g este funcție continuă rezultă că și funcția f este continuă, deoarece $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|\leq\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)-g(x_0)|=0\implies\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. **3p**

„$\Longrightarrow$" Din ipoteză, $f:\mathbb{R}\to\mathrm{Im}f$ este bijectivă. Apoi $x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)\Rightarrow g(x)\neq g(y)$, deci g este injectivă; cum g este și surjectivă reiese că g este bijectivă. Fie $F:\mathrm{Im}f\to\mathbb{R}$ inversa lui f. Din ipoteză, avem $\left|f\left(g^{-1}(x)\right)-f\left(g^{-1}(y)\right)\right|\leq|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$. **3p**

Deci $h=f\circ g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathrm{Im}f$ este lipschitziană (și bijectivă). Reiese că h este continuă, deci $h^{-1}:\mathrm{Im}f\to\mathbb{R}$ este continuă. Avem $h^{-1}=g\circ F$, deci $g=h^{-1}\circ F^{-1}=h^{-1}\circ f$, ceea ce arată că g este continuă. **4p**

8. Arătați că există o unică funcție $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $(f(x))^3+x\cdot f(x)-1=0$, $(\forall)x\in[0,\infty]$. Arătați că funcția este derivabilă pe $[0,\infty)$ și $f'(x)=-\frac{f(x)}{x+3f^2(x)}$.

Soluție. Din enunț $x=\frac{1-f^3(x)}{f(x)}$ cu $f(x)\neq 0, \forall x\in[0,\infty)$. **2p**

Considerăm funcția $g:(0,1]\to[0,\infty)$, $g(y)=\frac{1-y^3}{y}$. $\lim\limits_{y\to 0}g(y)=\infty$; $g(1)=0$, $g'(y)=-\frac{1}{y^2}-2y<0, y\in(0,1]$. Rezultă că funcția g este continuă și bijectivă, iar inversa ei $y=f(x)$ verifică exact relația din enunț. **5p**

Cum $f=g^{-1}$ rezultă că f este continuă și cum $g'(y)\neq 0, \forall y\in(0,1]$ obținem că f este derivabilă, iar $f'(x)=\dfrac{1}{g'(f(x))}=\dfrac{1}{-\frac{1}{f^2(x)}-2f(x)}=-\dfrac{f(x)}{x+3f^2(x)}$. **3p**