CONCURSUL „**MEMORIALUL GHEORGHE MIHOC**”
EDIȚIA A XI-A
ETAPA MUNICIPALĂ - 9 MAI 2026

Clasa a XII-a Barem

1. Determinați primitivele funcției $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln x(x+\ln^2 x)}$.

Soluție. $f(x)+\dfrac{2}{x\ln x}=\dfrac{\ln x-2}{\ln x(x+\ln^2 x)}+\dfrac{2}{x\ln x}=\dfrac{x\ln x-2x+2x+2\ln^2 x}{x\ln x(x+\ln^2 x)}=\dfrac{1+\frac{2\ln x}{x}}{x+\ln^2 x}=$ $\dfrac{(x+\ln^2 x)'}{x+\ln^2 x}$ **6p**

deci $f(x)=\left(\ln(x+\ln^2 x)\right)'-2\left(\ln(\ln x)\right)'$. Obținem $\displaystyle\int f(x)dx=\ln\frac{x+\ln^2 x}{\ln^2 x}+C$. **4p**

2. Fie A un inel finit cu proprietatea că există $a,b\in U(A)$ astfel încât $a-b\in U(A)$.
a) Determinați suma elementelor inelului.
b) Dați un exemplu de inel cu proprietatea din enunț, în care $1+1=0$.

Soluție. a) Pentru $c\in U(A)$, funcția $f_c:A\to A$ cu $f_c(x)=cx$ este injectivă, deci bijectivă. Atunci $S=\sum_{x\in A}x=\sum_{x\in A}f_c(x)=c\sum_{x\in A}x=cS$. Obținem $aS=bS$, deci $(a-b)S=0$ și cum $a-b\in U(A)$ rezultă $S=0$. **6p**

b) Fie inelul $A=M_2(\mathbb{Z}_2)$ cu operațiile uzuale și $a=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\\hat{1}&\hat{1}\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{1}\\\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$. Cum a,b și $a-b=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{1}\\\hat{1}&\hat{0}\end{pmatrix}\in U(A)$, iar $I_2+I_2=O_2$, inelul îndeplinește condițiile cerute. **4p**

3. Fie $f:[1,2]\to[0,\infty)$ o funcție continuă cu proprietatea $\displaystyle\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x\le 2$. Arătați că $\displaystyle\int_1^2(1+f(x))^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\le 2$.

Soluție. Cum $\frac{1}{x}\in[0,1]$, din inegalitatea lui Bernoulli avem $(1+f(x))^{\frac{1}{x}}\le 1+\frac{f(x)}{x}$ ... **4p**

Din C-B-S obținem $\int_1^2\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\le\sqrt{\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x}\le\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2}=1$. **4p**

Atunci $\int_1^2(1+f(x))^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\le\int_1^2\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\mathrm{d}x\le 1+1=2$. **2p**

4. a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție injectivă. Știind că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $g(x)=(x^2+1)f(x)$ are primitive, demonstrați că f este continuă.
b) Dați un exemplu de funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectivă și discontinuă, pentru care funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^2f(x)$ are primitive.

Soluție. Cum f este injectivă, este suficient să arătăm că f are proprietatea lui Darboux. Fie $a<b$ și γ între $f(a)$ și $f(b)$. Fie G o primitivă a lui g și $H:[a,b]\to\mathbb{R}$, $H(x)=G(x)-\gamma\left(\frac{x^3}{3}+x\right)$. Fie $u,v\in[a,b]$ puncte de minim, respectiv maxim ale lui H. Cum $H'(x)=(x^2+1)(f(x)-\gamma)$ și f e injectivă, atunci H' nu este funcția nulă, deci $u\ne v$. Dacă $\{u,v\}=\{a,b\}$, atunci $H'(a)H'(b)\ge 0$, de unde $(f(a)-\gamma)(f(b)-\gamma)\ge 0$, în contradicție cu alegerea lui γ. Deci cel puțin unul din punctele de extrem cade în (a,b). Din Fermat, există $c\in(a,b)$ cu $H'(c)=0$, de unde $(c^2+1)(f(c)-\gamma)=0$. Obținem $f(c)=\gamma$, deci f are proprietatea lui Darboux.

Observație. Altă abordare este să arătăm că $f = g/(x^2+1)$ are primitive sau, mai direct, să invocăm teorema lui Jarnik despre funcții cu proprietatea Darboux. **6p**

b) Alegem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, x \leq 0 \\ x+1, x > 0 \end{cases}$. Funcția f este injectivă, discontinuă, iar funcția h este continuă, deci are primitive. **4p**

5. Fie p și q numere naturale cu $3 \leq p < q$ și K un corp de ordin q și caracteristică p. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $A_n = \{x^n \mid x \in K\}$.

a) Arătați că $A_2 = A_{2p}$.

b) Determinați q știind că $A_2 \neq A_n, \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots, q-1\} \setminus \{2, 2p\}$.

Soluție. Cum K e corp rezultă $q = p^m$, $m \geq 2$. Arătăm că $A_2 = A_{2r}$ și $A_r = K$, pentru orice $r \in \mathbb{N}$, $(r, q-1) = 1$. Fie $f : K^* \to K^*$, $f(x) = x^r$. Atunci $f(x) = f(y) \Rightarrow x^r = y^r$ și cum $x^{q-1} = y^{q-1}$, $(r, q-1) = 1$, rezultă $x = y$. Obținem f injectivă, deci bijectivă, de unde $A_r = \mathrm{Im} f \cup \{0\} = K$. Atunci $A_2 = K^2 = (K^r)^2 = K^{2r} = A_{2r}$. **5p**

a) Cum $(p, q-1) = (p, p^m - 1) = 1$, rezultă concluzia. **2p**

b) Cum $(p^2, q-1) = (p^2, p^m - 1) = 1$, rezultă $A_2 = A_{2p^2}$, deci $2p^2 \geq q = p^m$, deci $m = 2$. Cum cel puțin unul din numerele $p-2$ și $p+2$ e coprim cu $p^2 - 1$, rezultă $A_2 = A_{2(p-2)}$ sau $A_2 = A_{2(p+2)}$, deci $2p + 4 \geq p^2$, de unde $p = 3$ și $q = 9$. **3p**

Observație. Corpul $\mathbb{F}_9$ are proprietatea din enunț deoarece $A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = \mathbb{F}_9$, $A_2 = A_6 \neq \mathbb{F}_9$ deoarece $|A_2| = 5, A_2 \neq A_8 = \{0, 1\}$ și $A_2 \neq A_4$, deoarece $|A_4| = 3$.

6. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\displaystyle\int_{1/x}^{2x} \frac{\operatorname{arctg}(1+t)}{t} dt - \frac{3\pi}{8} \ln(x^2+1) \right)$.

Soluție. Pentru $x > 0$ fie $I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{2x} \frac{\operatorname{arctg}\,(1+t)}{t} \mathrm{d}t$. Cu substituția $t = \dfrac{2}{u}$ obținem $I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{2x} \frac{\operatorname{arctg}\,(1+\frac{2}{u})}{u} \mathrm{d}u$, ... **3p**

deci $2I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{2x} \frac{\operatorname{arctg}\,(1+t) + \operatorname{arctg}\,(1+\frac{2}{t})}{t} dt = \frac{3\pi}{4} \int_{x}^{2x} \frac{1}{t} dt = \frac{3\pi}{4} \ln(2x^2)$. **5p**

Limita cerută este $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\pi}{8} (\ln(2x^2) - \ln(x^2+1)) = \dfrac{3\pi}{8} \ln 2$. **2p**

7. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{C}[X]$. Arătați că:

a) f nu are nicio rădăcină reală.

b) pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, numărul $f(k)$ nu este pătrat perfect în $\mathbb{Z}$.

Soluție. a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Cum funcția x^5 este strict crescătoare, rezultă $f(x) = \frac{x^5-1}{x-1} + 1 > 1$ pentru $x \neq 1$ și $f(1) = 6$, deci f nu are rădăcini reale. **4p**

b) Presupunem că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(k) = q^2$ cu $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$. Atunci $k^4 + k^3 + k^2 + k + 1 = q^2 - 1$ și fie r un divizor prim al lui $q^2 - 1$. Rezultă r divide $k^5 - 1$, deci ordinul lui $\hat{k}$ în $(\mathbb{Z}_r^*, \cdot)$ este 1 sau 5. .... **3p**

Dacă ordinul este 1, atunci $\hat{k} = \hat{1}$ și $\hat{1} + \hat{1} + \hat{1} + \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\hat{5} = \hat{0}$, de unde obținem $r = 5$. Dacă ordinul este 5, atunci 5 divide $r - 1$, deci $r = 5t + 1, t \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că divizorii primi ai lui $q-1$ și $q+1$ sunt 5 sau de forma $r = 5t+1$. Obținem $\hat{q} - \hat{1}, \hat{q} + \hat{1} \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ în $\mathbb{Z}_5$, deci $\hat{q} \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ și $\hat{q} \in \{\hat{0}, \hat{4}\}$, contradicție. **3p**

Observație. Punctul b) se poate face și urmărind felul în care valorile lui f în punctele întregi se pot încadra între pătrate perfecte consecutive.

8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și G o parte stabilă și finită a lui $M_{2n}(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor, astfel încât $\operatorname{rang}(A) \geq n+1$, oricare ar fi $A \in G$ și $\operatorname{rang}(A-B) \geq n$, pentru orice $A, B \in G$, cu $A \neq B$. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup.

Soluție. Fie $A \in G$. Cum G e finită, există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{p+q} = A^p$. Cum $A^p(A^q - I_{2n}) = O_{2n}$, din relația lui Sylvester rezultă $0 = \operatorname{rang} A^p(A^q - I_{2n}) \geq \operatorname{rang} A^p + \operatorname{rang}(A^q - I_{2n}) - 2n$ și, cum $A^p \in G$, deci $\operatorname{rang} A^p \geq n+1$, obținem $\operatorname{rang}(A^q - I_{2n}) \leq n-1$.**4p**

Dacă $B \in G$, atunci $BA^q \in G$ și cum $\operatorname{rang}(BA^q - B) = \operatorname{rang} B(A^q - I_{2n}) \leq \operatorname{rang}(A^q - I_{2n}) \leq n-1$, rezultă $BA^q = B$ și, analog, cum $A^qB \in G$, rezultă $A^qB = B$, deci $E = A^q$ este element neutru, element care, din unicitate și construcție, este putere nenulă a oricărei matrice din G. **4p**

Fie $X \in G$ și $s \in \mathbb{N}^*$ cu $X^s = E$. Atunci $XX^{2s-1} = X^{2s-1}X = X^{2s} = E$, deci X este simetrizabil. **2p**